

الجزء الخاص بالشرح
و التمارين

2021



التطبيق التفاعلي
للتعلم عن بُعد

الاستاتيكا المحاضرة

إعداد نخبة من خبراء التعليم



HUAWEI Mate 9
LEICA DUAL CAMERA

3
ثانوى

مراجعة عامة

على ما سبقت دراسته في الاستاتيكا

١ محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة

إذا كان : \vec{u} ، \vec{v} قوتين متلاقيتين في نقطة واحدة محصلتهما \vec{w} وقياس الزاوية بينهما = θ ، قياس زاوية ميل المحصلة \vec{w} على \vec{u} = ϕ

$$\text{فإن : } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \quad , \quad \frac{|\vec{w}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta}{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta} = 1$$

(حيث \vec{u} ، \vec{v} معيارا القوتين \vec{u} ، \vec{v} ، \vec{w} معيار المحصلة \vec{w})

حالات خاصة :

① إذا كانت : \vec{u} ، \vec{v} في نفس الاتجاه ($\theta = 0^\circ$)

$$\text{فإن : } \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

، اتجاه \vec{w} في نفس اتجاه القوتين

② إذا كانت : \vec{u} ، \vec{v} متضادتين في الاتجاه ($\theta = 180^\circ$)

$$\text{فإن : } \vec{w} = |\vec{u}| - |\vec{v}|$$

، اتجاه \vec{w} في نفس اتجاه القوة الأكبر مقداراً

③ إذا كانت : $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\text{فإن : } |\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \quad , \quad \frac{|\vec{w}|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2}{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} = 1$$

④ إذا كانت : $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w}$

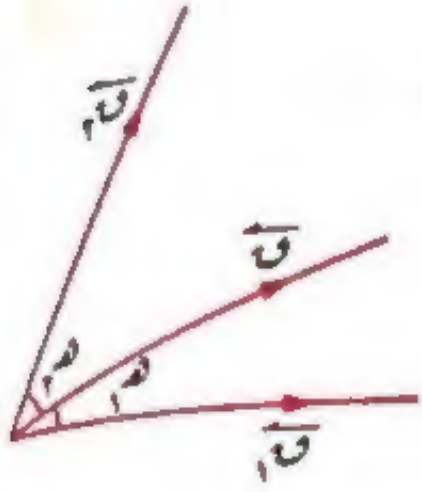
$$\text{فإن : } \vec{w} = 2\vec{u} \quad , \quad \frac{|\vec{w}|}{|\vec{u}|} = 2$$



HUAWEI Mate 9
LEICA DUAL CAMERA

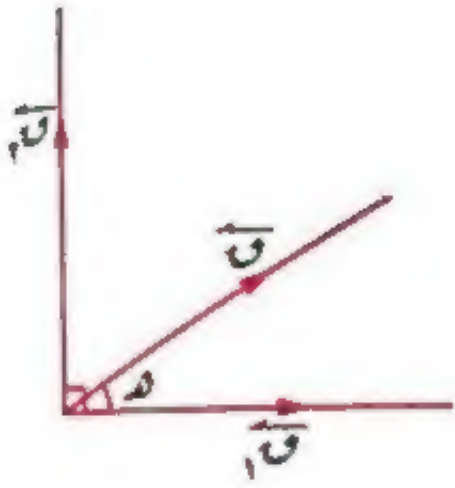
٢ تحليل القوة إلى مركبتين :

① في اتجاهين معلومين :

إذا كان : \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2 هما مركبتا القوة \vec{Q} 

$$\vec{Q}_1 = \frac{\vec{Q} \cos \alpha}{\cos(\alpha + \beta)} , \quad \vec{Q}_2 = \frac{\vec{Q} \cos \beta}{\cos(\alpha + \beta)}$$

② في اتجاهين متعامدين :

إذا كان : \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2 هما مركبتا \vec{Q} بحيث $\vec{Q}_1 \perp \vec{Q}_2$ 

$$\vec{Q}_1 = \vec{Q} \cos \alpha , \quad \vec{Q}_2 = \vec{Q} \sin \alpha$$

٣ محصلة عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة :

إذا كانت : \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2 ، ، \vec{Q}_n هي قياسات الزوايا القطبية التي تصنعها القوى

$$\vec{Q}_1 , \vec{Q}_2 , \dots , \vec{Q}_n \text{ مع } \vec{OS}$$

فإن : \vec{S} (المجموع الجبري لمركبات القوى في اتجاه \vec{OS})

$$= \vec{Q}_1 \cos \alpha_1 + \vec{Q}_2 \cos \alpha_2 + \dots + \vec{Q}_n \cos \alpha_n$$

، \vec{S} (المجموع الجبري لمركبات القوى في اتجاه \vec{OS})

$$= \vec{Q}_1 \sin \alpha_1 + \vec{Q}_2 \sin \alpha_2 + \dots + \vec{Q}_n \sin \alpha_n$$

$$\text{ويكون : } \vec{S} = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}$$

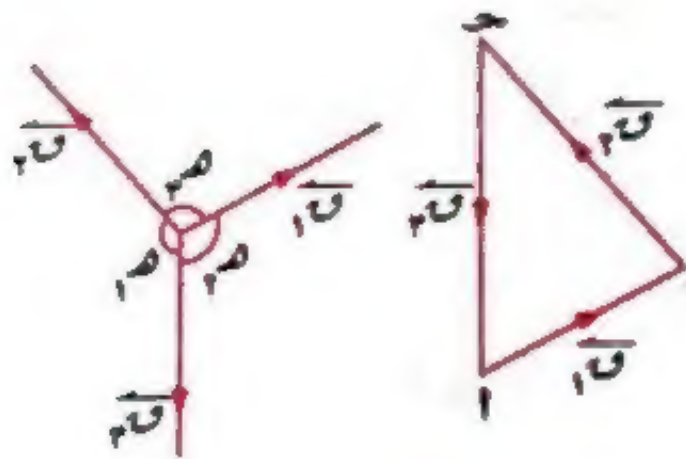
$$\vec{S} = \frac{S_y}{S_x} \text{ حيث } \theta \text{ زاوية ميل } \vec{S} \text{ على } \vec{OS}$$

١) إذا اتزن جسم تحت تأثير قوتين \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 فإن : \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وخط عملهما على استقامة واحدة.

٢) إذا اتزن جسم تحت تأثير ثلاث قوى \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 ، \vec{F}_3 فإن :

(١) إذا تلاقى خطا عمل قوتين منها في نقطة فإن خط عمل القوة الثالثة لابد أن يمر بهذه النقطة.

(٢) إذا رسم مثلث أضلاعه توازي خطوط



عمل القوى الثلاثة وفي اتجاه دورى واحد

فإن أطوال أضلاعه تكون متناسبة مع مقادير القوى المناظرة.

أى : $\frac{F_1}{a} = \frac{F_2}{b} = \frac{F_3}{c}$ (قاعدة مثلث القوى)

(٣) مقدار كل قوة يتناسب مع جيب الزاوية المحصورة بين القوتين الآخرين

أى : $\frac{F_1}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_3}{\sin \gamma}$ (قاعدة لامي)

٣) يتزن الجسم تحت تأثير عدة قوى متلاقية في نقطة واحدة إذا كان :

المجموع الجبرى لمركبات القوى فى اتجاه ما = صفر

والمجموع الجبرى لمركبات القوى فى الاتجاه العمودى عليه = صفر

تمارين تراكمية

على ما سبقت دراسته في الاستاتيكا (من الكتاب المدرسي)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت قوتان مقدارهما ٤ ، ٨ نيوتن تؤثران في نقطة وقياس الزاوية بينهما 120° فإن مقدار محصلتهما يساوي

(١) ١٢ (ب) ٤ (ج) $4\sqrt{2}$ (د) $8\sqrt{2}$

٢ إذا اتزنت ثلاث قوى مستوية ومتساوية في المقدار ومتلاقية في نقطة فإن قياس الزاوية بين أي قوتين فيها يساوي

(١) 30° (ب) 60° (ج) 90° (د) 120°

٢ ثلاث قوى مستوية مقاديرها ٤ ، ٥ ، ٦ نيوتن تؤثر في نقطة مادية ، فإذا كانت المجموعة متزنة. فما قياس الزاوية بين القوتين الأخيرتين ؟

٣ أزيحت كرة بندول وزنها ٦٠٠ ثجم حتى صار الخيط يصنع زاوية قياسها 30° مع الرأسى تحت تأثير قوة على الكرة في اتجاه عمودى على الخيط. أوجد مقدار القوة ومقدار الشد في الخيط.

٤ عُلق ثقل وزنه ٢٦ نيوتن بخيطين طولاهما ٢٥ سم ، ٦٠ سم ، وثبت الطرفان الآخران للخيطين في نقطتين من خط أفقى ، البعد بينهما ٦٥ سم. أوجد الشد في كل من الخيطين.

٥ عُلق جسم وزنه (٩) نيوتن بواسطة خيطين يميلان على الرأسى بزاويتين قياسهما 30° ، 60° فأتزن الجسم عندما كان الشد في الخيط الأول ١٢ نيوتن والشد في الخيط الثانى ٩ نيوتن. أوجد قيمة الوزن (٩) وقياس الزاوية 60°

٦ كرة مصممة منتظمة وزنها ٣٠ ثجم تستند بسطحها على مستويين ، فإذا كانت الكرة في حالة اتزان بين مستويين أملسين أحدهما رأسى ، والآخر يميل على الرأسى بزاوية قياسها 60° أوجد مقدارى قوتى الضغط على كل من المستويين.

٧ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن (يؤثر في منتصفه) ، عُلق القضيب من طرفيه بخيطين خفيفين ، ثبت طرفاهما من نقطة في سقف حجرة. إذا كان الخيطان متعامدين وطول أحدهما ٦٠ سم ، فأوجد مقدار الشد في كل من الخيطين عندما يكون القضيب مُعلقاً تعليقاً حراً وفي حالة توازن.

٨ أ ب قضيب منتظم (وزنه يؤثر في منتصفه) مثبت بطرفه أ في حائط رأسي بواسطة مفصل ، جذب القضيب أفقياً بقوة مقدارها ١٠ ث. كجم من طرفه ب حتى اتزن القضيب في وضع يصنع فيه زاوية قياسها ٣٠° مع الرأسى. أوجد ١ ، ورد فعل المفصل.



HUAWEI Mate 9
LEICA DUAL CAMERA

الاحتكاك

1 الوحدة



مفهوم الاحتكاك - اتزان جسم على مستوٍ أفقي خشن.

الدرس الأول

اتزان جسم على مستوٍ مائل خشن.

الدرس الثاني



يمكنك حل
المشكلات التفاعلية
على الدروس

مع هاتفك Mate 9
المزود بكاميرا
LEICA DUAL CAMERA



مفهوم الاحتكاك - اتزان جسم على مستوي أفقي خشن

الدرس
1

مفهوم الاحتكاك

لقوى الاحتكاك أهمية كبيرة في حياتنا العملية. فلولاها لما استطاع الإنسان السير دون أن تنزلق قدماه ولا استطاع الجسم المتحرك التوقف عن الحركة عند الحاجة إلى ذلك. ولذلك قد لا نبالي إذا اعتبرنا أن قوى الاحتكاك سر من أسرار الكون ونظرًا لوجود نتوءات وتجويفات على سطوح كل الأجسام مهما بلغت درجة نعومتها تنشأ قوى الاحتكاك نتيجة تداخل هذه النتوءات والتجويفات لكل من السطحين المتلامسين ويعتبر معامل الاحتكاك مقياسًا لدرجة خشونة الأسطح فإذا ازدادت قيمة معامل الاحتكاك ازدادت الخشونة وإذا كان معامل الاحتكاك = صفر فإن قوى الاحتكاك تنعدم تمامًا وفيما يلي سوف نستعرض بعض التعاريف التي سوف تساعدنا على التعرف على مفهوم الاحتكاك.

السطح الأملس والسطح الخشن

* السطح الأملس :

هو سطح افتراضي تنعدم فيه قوى الاحتكاك تمامًا.

* السطح الخشن :

هو سطح تظهر فيه قوى الاحتكاك عند محاولة تحريك جسم عليه.

لاحظ أن

① معامل احتكاك السطح الأملس = صفر

② معامل احتكاك السطح الخشن

= عدد حقيقي < 0 (أي عدد حقيقي موجب)



HUAWEI Mate 9
LEICA DUAL CAMERA

رد الفعل

هو قوة تنشأ من تلامس سطحين فإذا وضعنا جسمًا على نضد أفقى فإن الجسم يضغط على النضد بقوة ضغط \vec{F} تسمى بالفعل وكذلك النضد يؤثر على الجسم بقوة رد الفعل \vec{R}



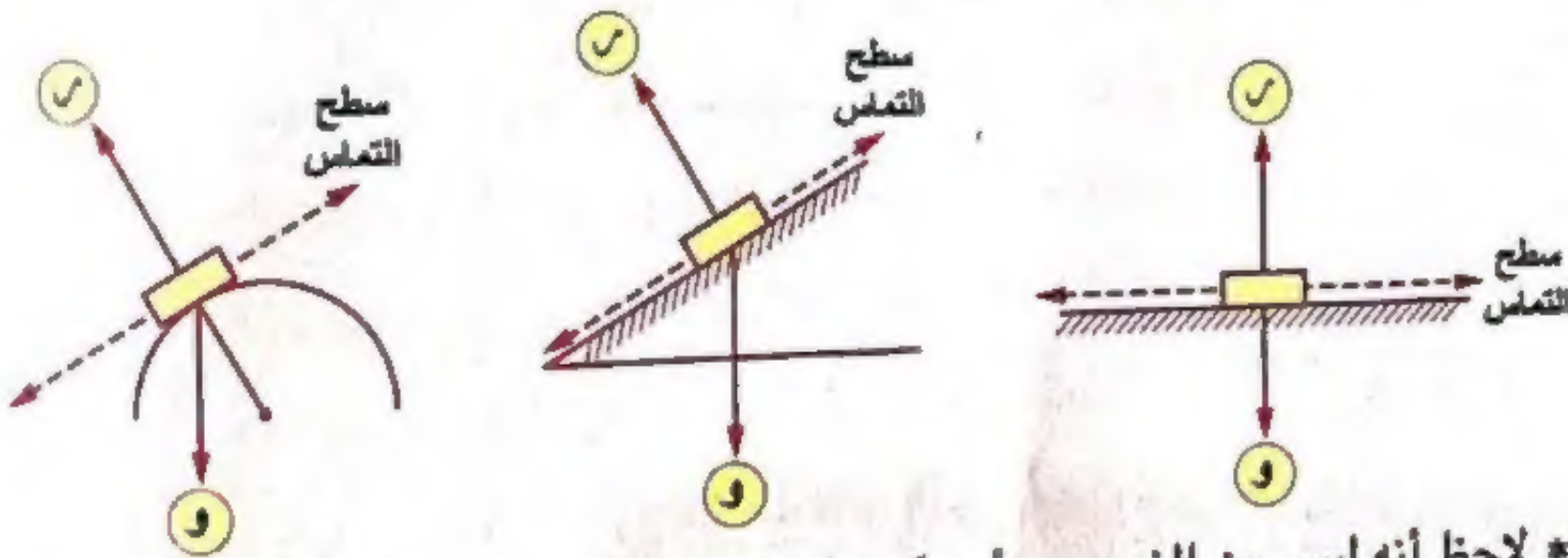
مع ملاحظة أن :

القوتان \vec{R} ، \vec{F} لا تؤثران فى نفس الجسم بل إحدهما وهى قوة الضغط \vec{F} تؤثر فى النضد بينما قوة رد الفعل \vec{R} تؤثر فى الجسم. وطبقًا للقانون الثالث لنيوتن نجد أن : $\vec{R} = -\vec{F}$



ملاحظة

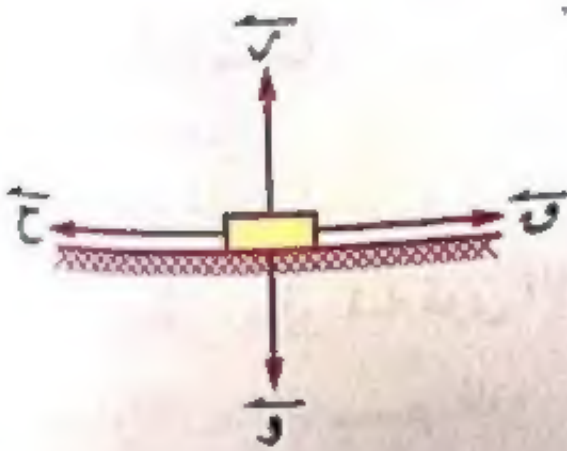
رد الفعل فى حالة السطوح الملساء يكون عمودياً على سطح التماس المشترك للجسمين المتلامسين ويسمى (رد الفعل العمودى) ويأخذ أحد الأشكال الآتية :



* لاحظ أنه ليس من الضرورى أن يكون اتجاه رد الفعل العمودى معاكسًا لاتجاه الوزن.

قوة الاحتكاك السكونى

إذا وضعنا جسمًا مقدار وزنه W على مستوى أفقى خشن وأثرنا على الجسم بقوة أفقية صغيرة F فإنه يظهر تأثير قوة خفية تقاوم حركة الجسم تسمى قوة الاحتكاك ويرمز لها بالرمز \vec{f} تعمل فى اتجاه مضاد للقوة F فإذا لم يكن مقدار القوة F كافيًا لتحريك الجسم فإن الجسم فى هذه الحالة يكون مترنًا تحت تأثير :



① قوة الوزن \vec{W} وقوة رد الفعل العمودي \vec{R} حيث $\vec{W} = \vec{R}$

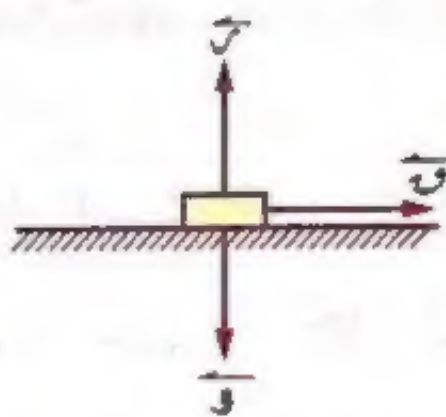
② القوة الأفقية \vec{F} ، وقوة الاحتكاك \vec{F}_f حيث $\vec{F} = \vec{F}_f$

ومن ذلك يمكن أن نستنتج أن :

قوة الاحتكاك السكوني

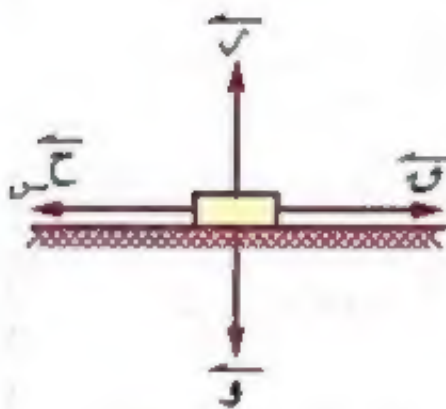
هي قوة خفية تظهر عند محاولة تحريك جسم على سطح خشن.

ملاحظة



إذا وضعنا جسمًا أملس على مستوى أفقي أملس فإن الجسم يكون متزنًا تحت تأثير قوتين وهما قوة وزن الجسم \vec{W} وقوة رد الفعل العمودي \vec{R} فإذا أثّرنا على الجسم بقوة أفقية \vec{F} فإن الجسم في هذه الحالة لا يمكن أن يتزن مهما كانت هذه القوة صغيرة في المقدار وذلك لعدم ظهور القوة المضادة للقوة \vec{F} التي تعمل على اتزان الجسم وهي قوة الاحتكاك \vec{F}_f وهذا يعني أن قوة الاحتكاك لا تظهر إلا عند محاولة تحريك الجسم على سطح خشن.

قوة الاحتكاك السكوني النهائي

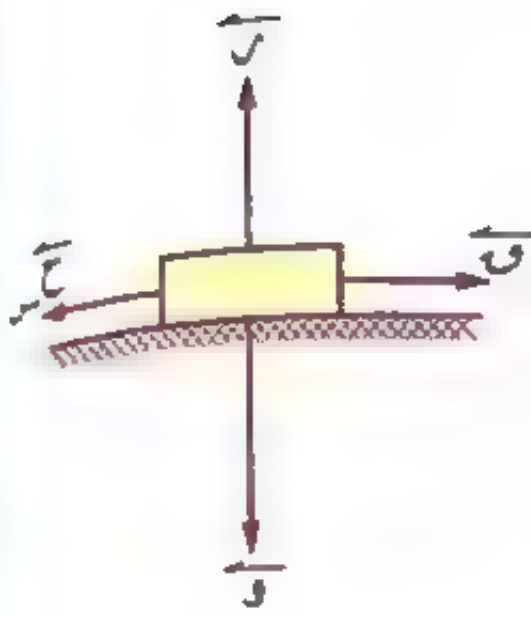


يزداد مقدار قوة الاحتكاك السكوني «ح» كلما زاد مقدار القوة الأفقية «و» المؤثرة على جسم موضوع على مستوى أفقي خشن إلى أن يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى نهايته العظمى «قيمة لا يمكن أن يتعداها» حين يصبح الجسم على وشك الحركة وفي هذه الحالة يُقال أن الاحتكاك أصبح نهائيًا ويرمز له بالرمز \vec{F}_f وتكون معادلتا اتزان الجسم هما : $\vec{W} = \vec{R}$ ، $\vec{F} = \vec{F}_f$ ونستنتج من ذلك أن :

قوة الاحتكاك السكوني النهائي

هي قوة الاحتكاك عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته النهائية (العظمى) والتي عندها يكون الجسم على وشك الحركة ويرمز لها بالرمز \vec{F}_f

معامل الاحتكاك السكوني



تسمى النسبة بين مقداري قوة الاحتكاك السكوني النهائي (f_s) ورد الفعل العمودي (N) بمعامل الاحتكاك بين السطحين المتلامسين ويرمز له بالرمز μ_s

أي أن: $\mu_s = \frac{f_s}{N}$ ومنها $f_s = \mu_s N$

قوة الاحتكاك الحركي

إذا تحرك جسم على سطح خشن فإنه يخضع لقوة احتكاك حركي (f_k) في اتجاه مضاد لاتجاه الحركة ويكون $f_k = \mu_k N$

حيث μ_k معامل الاحتكاك الحركي ، N رد الفعل العمودي ومنها يمكن تعريف معامل الاحتكاك الحركي على أنه النسبة بين قوة الاحتكاك الحركي وقوة رد الفعل العمودي.

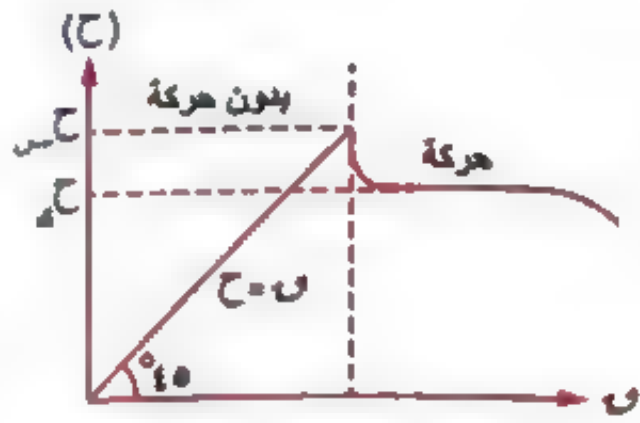
ملاحظات

① المتساوية: $f_s = \mu_s N$ تتحقق فقط عند الاحتكاك السكوني النهائي أي عندما يكون الجسم على وشك الحركة وهي أقصى قيمة لقوة الاحتكاك السكوني f_s أي أن: $0 \leq f_s \leq \mu_s N$

② معامل الاحتكاك μ_s ، μ_k يعتمدان على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكلهما أو كتلتهما أو مساحة السطوح المتماسمة.

③ قوة الاحتكاك النهائي للأجسام الساكنة (f_s) < قوة الاحتكاك للأجسام المتحركة (f_k) وبالتالي معامل الاحتكاك السكوني (μ_s) < معامل الاحتكاك الحركي (μ_k) وهذا شيء نلاحظه في حياتنا العملية حيث يحتاج الشخص إلى قوة كبيرة في بداية الأمر لتحريك صندوق خشبي على الأرض ولكن بعد أن يتحرك الصندوق نلاحظ أن القوة اللازمة أصبحت أقل من ذي قبل وهذا لأن الجسم أصبح متحركاً وبالتالي فإن قوة الاحتكاك تصبح أقل.

قوة الاحتكاك

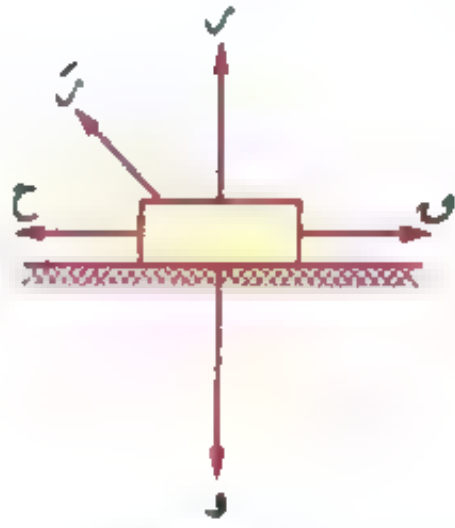


ومن الشكل المقابل نستنتج أن :

قوة الاحتكاك تزداد تدريجياً بزيادة القوة المعاكسة الموازية للمستوى المؤثرة على الجسم حتى تصل إلى حد لا تتعداه (الاحتكاك السكوني النهائي) وذلك عندما يكون الجسم على وشك الحركة ويسمى عندها الاحتكاك السكوني النهائي (C_s)

وله معامل احتكاك سكوني (μ_s) ثم يقل كما بالشكل في حالة الحركة ويكون احتكاك حركي (C_k) وله معامل احتكاك حركي (μ_k) ثم بعد ذلك يقل أكثر في حالة السرعات الكبيرة.

رد الفعل المحصل



يرمز لرد الفعل المحصل (رد الفعل الكلي) بالرمز \vec{R} وهو محصلة رد الفعل العمودي \vec{R} وقوة الاحتكاك \vec{C}

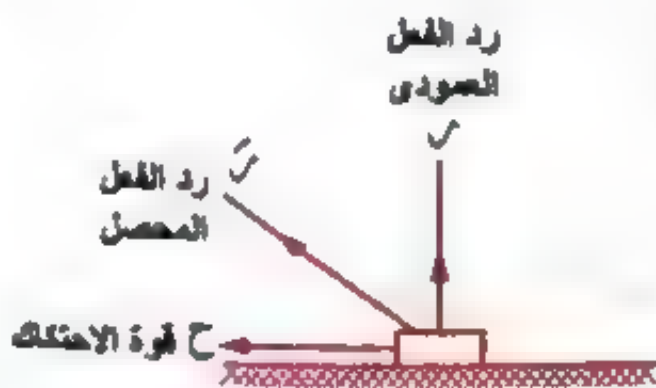
$$R = \sqrt{C^2 + R^2}$$

وفي حالة الاحتكاك النهائي يكون : $R = \sqrt{C_s^2 + R^2}$

$$R = \sqrt{C_s^2 + R^2} \quad \therefore R = \sqrt{C_s^2 + R^2}$$

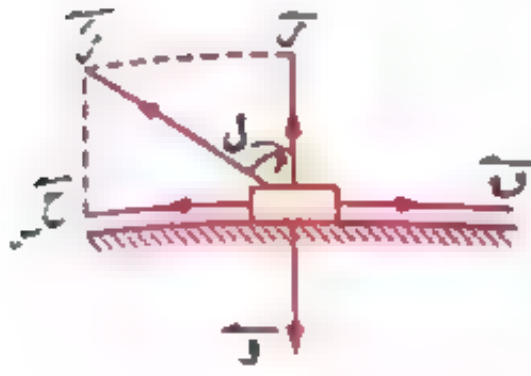
$$R = \sqrt{C_s^2 + R^2}$$

ملاحظة

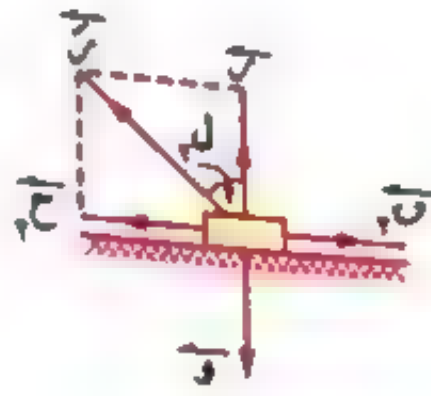


رد الفعل في حالة السطوح الخشنة يكون غير معلوم الاتجاه ويسمى (رد الفعل المحصل) أو (رد الفعل الكلي) ويمكن تحليله إلى مركبتين متعامدتين المركبة العمودية على سطح التماس وتسمى بقوة رد الفعل العمودي (R) ، المركبة الموازية لسطح التماس وتسمى بقوة الاحتكاك (C)

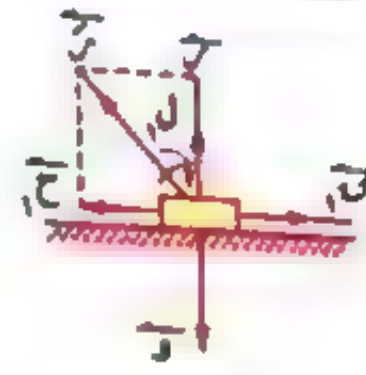
زاوية الاحتكاك



شكل (٣)



شكل (٢)



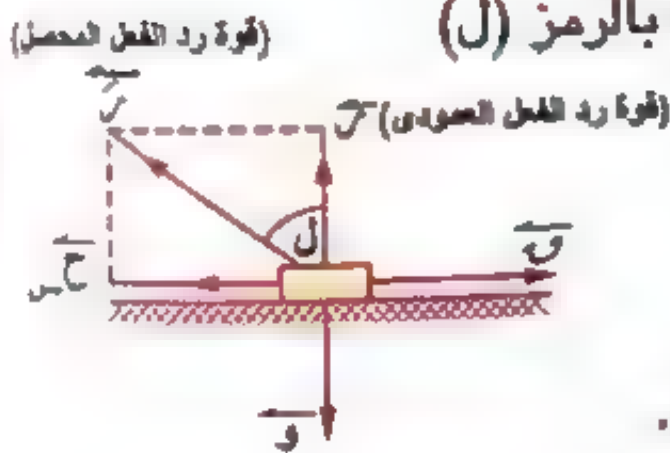
شكل (١)

ليكن R مقدار رد الفعل المحصل ، L قياس الزاوية المحصورة بين هذه القوة وقوة رد الفعل العمودي (شكل ١) وكلما تزايد مقدار قوة الاحتكاك فإن قياس الزاوية يزداد تبعاً لذلك وليكن L (شكل ٢) وعندما تصل قوة الاحتكاك إلى نهايتها العظمى H فإن قياس الزاوية هذا يصل إلى نهايته العظمى وليكن L وتسمى L في هذه الحالة بقياس زاوية الاحتكاك (شكل ٣) أي أن :

زاوية الاحتكاك

هي الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل المحصل وقوة رد الفعل العمودي عندما يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى قيمته

العظمى H = M ويرمز لقياس زاوية الاحتكاك بالرمز (L)



ويكون : $\tan L = \frac{H}{M}$ ولكن $\frac{H}{M} = \frac{C}{R}$ $\therefore M = \frac{C}{R}$

$\therefore M = \tan L$

أي أن : ظل زاوية الاحتكاك يساوي معامل الاحتكاك.

$$\therefore R = \sqrt{M^2 + 1} \quad \therefore R = \sqrt{L^2 + 1} \quad \therefore R = \frac{C}{\sin L} \quad \text{فأ } R = \frac{C}{\sin L} \quad (L)$$

ومما سبق يمكن أن نلخص خواص الاحتكاك كما يلي :

خواص الاحتكاك

- ① قوة الاحتكاك عبارة عن قوة خفية تعمل على معاكسة حركة الجسم.
- ② قوة الاحتكاك تكون دائماً في اتجاه مضاد للاتجاه المحتمل لحركة الجسم.

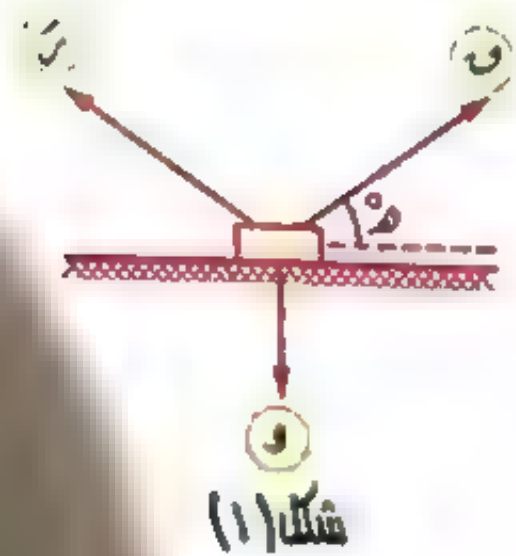
- ٣ مقدار قوة الاحتكاك يزداد تدريجياً كلما ازدادت القوة المماسية ويكون مساوياً لمقدار هذه القوة المماسية طالما كان الجسم متزناً إلى أن يصل مقدار قوة الاحتكاك إلى حد لا يتعداه وعندئذ يصبح الجسم على وشك الحركة أو في نهاية اتزانه ويسمى الاحتكاك في هذه الحالة بالاحتكاك السكوني النهائي ويرمز له بالرمز μ_s
- ٤ إذا زاد مقدار القوة المماسية بعد ذلك فإن الجسم يتحرك على المستوى.
- ٥ النسبة بين مقدارى قوة الاحتكاك السكوني النهائي (μ_s) ، رد الفعل العمودى (N) نسبة ثابتة تتوقف على طبيعة الجسمين المتلامسين وليس على شكلهما أو كتلتهما وتسمى هذه النسبة بمعامل الاحتكاك السكوني (μ_s)

ملاحظة

عند وضع جسمان مصنوعان من نفس المادة وغير متساويين فى الوزن على مستوى أفقى خشن واحد يكون لهما نفس معامل الاحتكاك أما قوة الاحتكاك السكوني النهائي لكل جسم تتغير حسب وزنه.

اتزان جسم على مستوى أفقى خشن

إذا وضع جسم مقدار وزنه (W) على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه قوة مقدارها P تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها θ فإن الجسم فى وضع الاتزان يكون متزناً تحت تأثير ثلاث قوى هى :



١ قوة الوزن W رأسياً لأسفل ومقدارها W

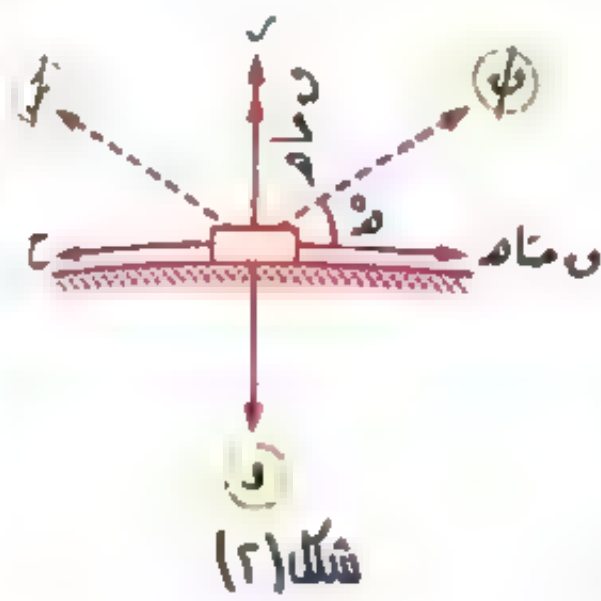
٢ قوة رد الفعل المحصل R ومقدارها R

٣ القوة P ومقدارها P كما بالشكل (١)

وبتحليل القوة P إلى مركبتين فى الاتجاه الأفقى والاتجاه

العمودى عليه فيكون مقدارهما $P \cos \theta$ ، $P \sin \theta$

وبتحليل قوة رد الفعل المحصل R إلى مركبتين متعامدتين



فما رد الفعل العمودي N ومقداره N ، وقوة الاحتكاك f ومقداره f كما بالشكل (٢) فتكون معادلتا اتزان الجسم هما :

(١)

$$N = W + f \sin \theta$$

(٢)

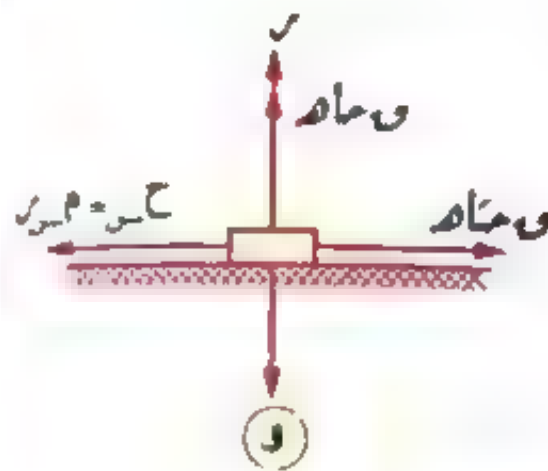
$$N = W + f \cos \theta$$

* إذا كان الجسم على وشك الحركة فإن الاحتكاك يصبح نهائياً

أي : $N = W$ ومن الاتزان : يكون $f = W \sin \theta$

$$N = W \cos \theta$$

∴ معادلتا الاتزان للجسم هما :



$$N = W \cos \theta \quad (١) \quad , \quad f = W \sin \theta \quad (٢)$$

ملاحظات

١) إذا كانت القوة P المؤثرة على الجسم أفقية والجسم متزن فإن $W = N$

$$N = W \cos \theta = 0 \quad , \quad f = W \sin \theta = W$$

ويكون معادلتا الاتزان هما :

$$N = W \cos \theta \quad (١) \quad , \quad f = W \sin \theta \quad (٢)$$

وفي حالة الاحتكاك النهائي

$$N = W \cos \theta = W \quad , \quad f = W \sin \theta = W$$

∴ $N = W$ و $f = W$ وهي القوة الأفقية التي تجعل الجسم على وشك الحركة.

وهي أكبر قوة أفقية تحافظ على توازن الجسم.

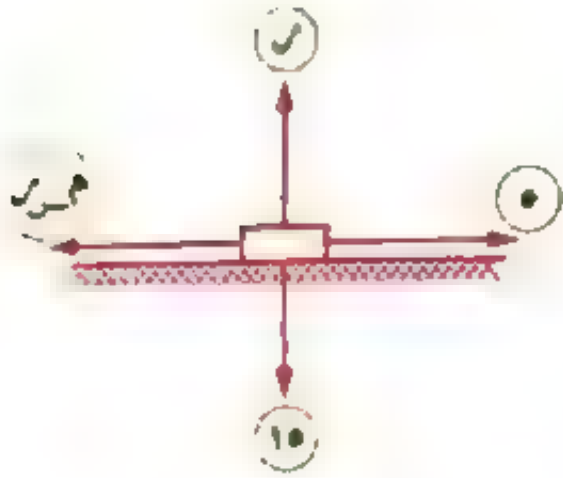
٢) إذا وضع جسم وزنه (W) على مستوى أفقى خشن ولم تؤثر عليه أى قوة فإن قوة الاحتكاك فى هذه الحالة تساوى صفر.

مثال ١

وضع جسم وزنه ١٥ ثقل كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت فى الجسم قوة أفقية مقدارها ٥ ثقل كجم جعلت الجسم على وشك الحركة.

- ١) أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى.
- ٢) إذا وضع فوق الجسم صنج وزنها ٣ ثقل كجم فأوجد مقدار القوة الأفقية التى تؤثر فى الجسم وما عليه من صنج كى يصبح على وشك الحركة.

الحل



١) ∴ الجسم على وشك الحركة

∴ الاحتكاك نهائى ومقداره = $\mu_s \times 15$

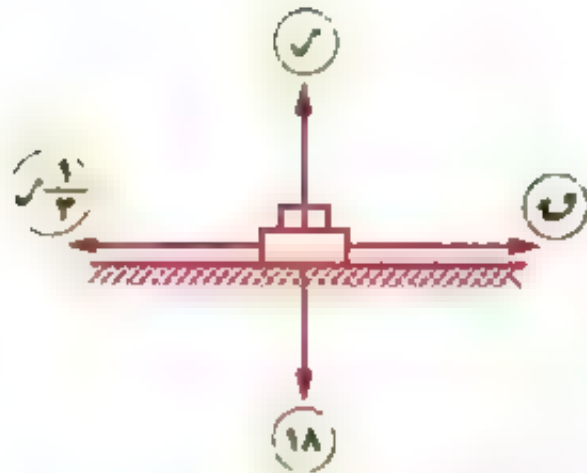
∴ معادلتا اتزان الجسم هما :

$$\mu_s \times 15 = 5 \quad (1) \quad , \quad \mu_s \times 15 = 10 \quad (2)$$

وبالتعويض من (٢) فى (١) :

$$\mu_s \times 15 = 10 \quad \therefore \mu_s = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

∴ معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{2}{3}$



٢) مقدار وزن الجسم وما عليه من صنج

$$= 15 + 3 = 18 \text{ ث.كجم}$$

وبفرض أن مقدار القوة الأفقية التى تجعل الجسم

وما عليه من صنج على وشك الحركة = $\mu_s \times 18$ ث.كجم

$$\therefore \text{معادلتا الاتزان هما : } \mu_s \times 18 = 5 \quad (1) \quad , \quad \mu_s \times 18 = 10 \quad (2)$$

بالتعويض من (٢) فى (١) : ∴ $\mu_s = \frac{5}{18} \times 18 = 5$ ث.كجم

مثال ٢

وضعت كتلة خشبية وزنها ١٠ نيوتن على نضد أفقى وربطت بخيط أفقى يمر على بكرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٢,٥ نيوتن. فإذا كانت الكتلة الخشبية متزنة على النضد فعين مقدار قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودى وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة الخشبية والنضد يساوى $\frac{1}{3}$ فهل تكون الكتلة الخشبية على وشك الحركة أم لا ؟

الحل

• الجسم المعلق متزن تحت تأثير قوتين وزنه (و) $= 2,5$ نيوتن

والشد في الخيط (س)

أي أن: $س = 2,5$ نيوتن

• \therefore الكتلة الخشبية على النضد متزنة

\therefore $س = 2,5$ نيوتن ، $ر = 10$ نيوتن

تكون الكتلة الخشبية على وشك الحركة عندما يصل مقدار الاحتكاك ح إلى قيمته العظمى

$ح_{س} = ح_{ر}$ أي يصبح الاحتكاك نهائى

\therefore $ح_{س} = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5$ نيوتن ، $س = 2,5$ نيوتن \therefore $ح_{س} > ح$

\therefore الاحتكاك غير نهائى \therefore الكتلة الخشبية لا تكون على وشك الحركة.

مثال ٣

وضع جسم وزنه ١٥ ثقل كجم على مستوى أفقى خشن فإذا كان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى 30° فأوجد :

① القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة.

② القوة التى تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها 30° وتجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى أيضاً.

الحل

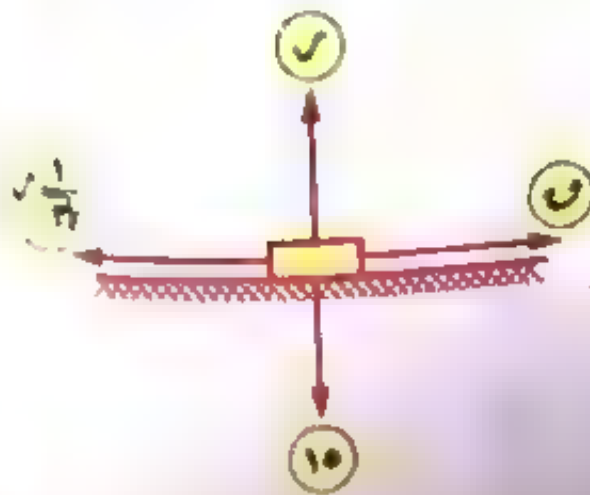
① إذا كانت القوة أفقية :

\therefore الجسم على وشك الحركة على المستوى

\therefore $ح_{س}$ (معامل الاحتكاك السكونى) $= طال = 30$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} =$$

وحيث أن الجسم متزن تحت تأثير القوى الموضحة بالشكل

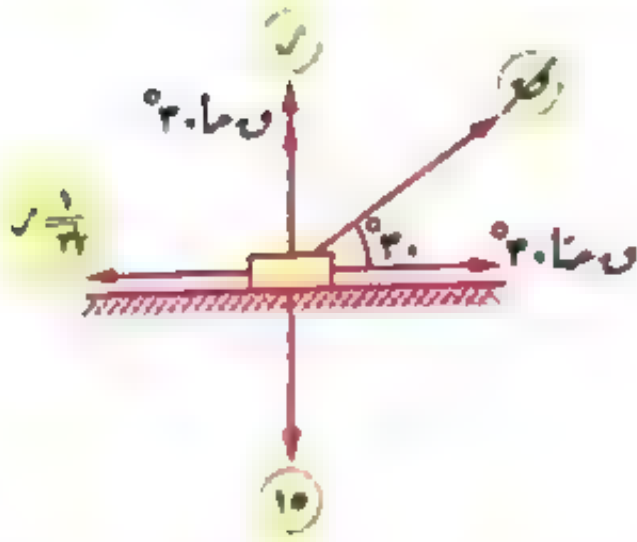


∴ معادلنا الاتزان هما :

$$(1) \quad r = 10 \quad (2) \quad r = \frac{1}{3} \quad \text{وبالتعويض من (2) في (1) : } \therefore r = \frac{10}{3} = 3.33 \text{ ثقل كجم}$$

∴ القوة الأفقية التي تكفي لجعل الجسم على وشك الحركة هي 3.33 ثقل كجم.

(2) إذا كانت القوة مائلة على الأفقى :



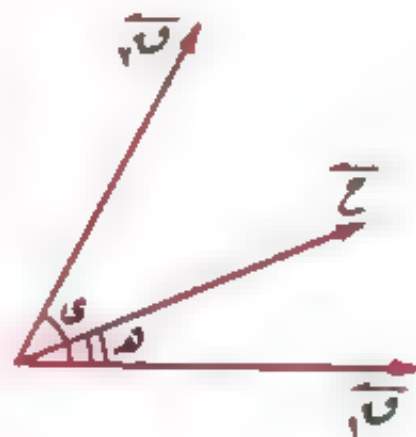
بتحليل القوة \vec{F} إلى مركبتين مقدارهما : $\vec{F} \cos 30^\circ$ في الاتجاه الأفقى والاتجاه العمودى عليه ،
∴ معادلنا الاتزان هما : $\vec{F} \cos 30^\circ = 10$ $\therefore \vec{F} = \frac{10}{\cos 30^\circ} = 11.55$ $\therefore \vec{F} = 11.55$ $\therefore \vec{F} = 11.55$ $\therefore \vec{F} = 11.55$

$$(2) \quad 10 = r + \frac{1}{3} \therefore r = 9.67$$

$$10 = 20 + r \therefore r = -10$$

وبالتعويض من (1) في (2) : $\therefore r = 10 - \frac{1}{3} = 9.67$ ∴ ثقل كجم

تذكر أن



إذا كان : \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 قوتين متلاقيتين فى نقطة وكان

قياس الزاوية بين اتجاهى القوتين يساوى α

$$\text{فإن مقدار محصلة القوتين } R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha}$$

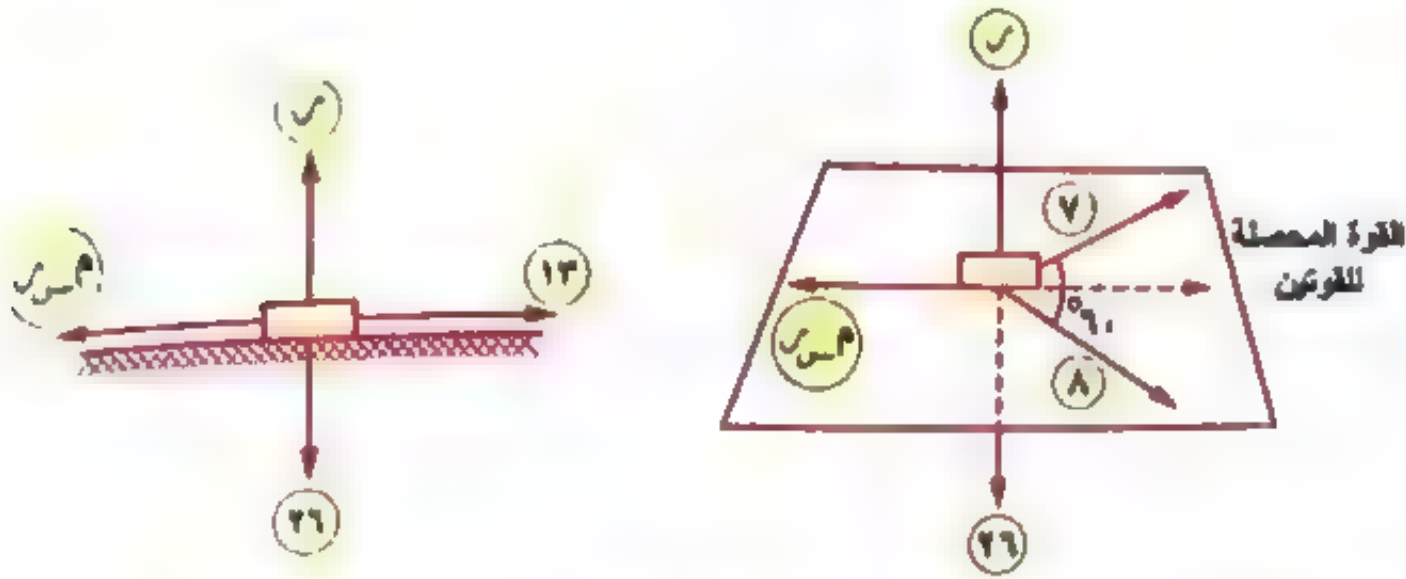
$$\cos \alpha = \frac{F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha}{R}$$

حيث α قياس زاوية ميل المحصلة \vec{R} على القوة الاولى \vec{F}_1

مثال ٤

وضع جسم وزنه ٢٦ نيوتن على مستو أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقداراهما ٧ ، ٨ نيوتن يحصران بينهما زاوية قياسها 60° وكانت القوتان أفقيتين وواقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد :

(1) قياس زاوية الاحتكاك. (2) رد الفعل المحصل.



الجسم على وشك الحركة تحت تأثير محصلة القوتين اللتين مقداراهما ٧ ، ٨ نيوتن ومقدار هذه المحصلة يعادل مقدار قوة الاحتكاك النهائي $\mu_s = 0.2$

وحيث أن مقدار المحصلة $= \sqrt{7^2 + 8^2} = 10.6$ نيوتن

∴ مقدار محصلة القوتين $= \sqrt{7^2 + 8^2} = 10.6$ نيوتن (حيث $\mu_s = 0.2$)

∴ مقدار محصلة القوتين $= \sqrt{169} = 13$ نيوتن

∴ الجسم في حالة اتزان نهائي

∴ معادلتا الاتزان هما : $\mu_s = 0.2$ ، $13 = \mu_s \cdot 26$ (١)

وبقسمة (١) على (٢) : $\frac{13}{26} = \mu_s$ ∴ $\mu_s = 0.5$

ولكن معامل الاحتكاك السكوني = ظل زاوية الاحتكاك = μ_s ∴ $\mu_s = 0.5$

∴ قياس زاوية الاحتكاك $\theta = 26.6^\circ$

∴ رد الفعل المحصل $(R) = \sqrt{26^2 + 13^2} = 29.1$ نيوتن

$\sqrt{26^2 + 13^2} = \sqrt{(26^2 + 13^2)} = 29.1$ نيوتن

∴ $R = \sqrt{26^2 + 13^2} = 29.1$ نيوتن

مثال ٥

وضع جسم مقدار وزنه ٢ نيوتن على مستوى أفقي خشن وأثرت على الجسم في نفس المستوى قوتان مقداراهما $3\sqrt{2}$ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها 150° فظل الجسم ساكناً أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك (θ) بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن 45° وإذا كان

ل = 60° وبقي اتجاه كل من القوتين ثابتاً كما بقيت القوة 2√3 نيوتن دون تغيير
فعين مقدار القوة الأخرى غير المنعدمة لكي يصبح الجسم على وشك الحركة
وعين أيضاً الاتجاه الذي يوشك الجسم أن يبدأ الحركة فيه.

الحل

∴ مقدار محصلة القوتين اللتين مقداراهما 4 ، 2√3 نيوتن

$$R = \sqrt{(4)^2 + (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \cos 150^\circ}$$

$$R = \sqrt{16 + 12 + 24 \times (-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \sqrt{28 - 12\sqrt{3}}$$

$$R = 2\sqrt{7} \approx 5.29 \text{ نيوتن}$$

∴ الجسم متزن تحت تأثير

① قوة الاحتكاك ومقدارها ح ومحصلة القوتين 4 ، 2√3 نيوتن ومقدارها 2 نيوتن

$$\therefore H = 2 \text{ نيوتن}$$

② قوة رد الفعل العمودي ومقدارها ر ، وزن الجسم ومقداره 2 نيوتن

$$\therefore R = 2 \text{ نيوتن}$$

∴ الجسم ساكن

$$\therefore H \geq R \text{ ، } R \geq 2$$

$$\therefore H \geq 2$$

$$\therefore H \geq 2$$

∴ قياس زاوية الاحتكاك ل يجب ألا يقل عن 45°

$$\therefore H = 2 \text{ ، } R = 2 \text{ ، } \theta = 60^\circ$$

وبفرض أن مقدار القوة الأخرى لكي يصبح الجسم على وشك الحركة = 0

∴ مقدار محصلة القوتين اللتين مقداراهما 2√3 ، 2 نيوتن = مقدار قوة الاحتكاك النهائي ح

$$\therefore H = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \cos 150^\circ} = 2\sqrt{7}$$

الوحدة 1

$$\therefore 12 = 9 - 6 + 12 \quad \text{«ويتربيع الطرفين»} \quad 2 \times \sqrt{3} = 9 - 6 + 12$$

$$\therefore 12 = 9 - 6 + 12 \quad \therefore 9 - 6 = 12 \quad \therefore 3 = 6$$

$$\therefore 9 = (6 - 3) \quad \therefore 9 = 3 \quad \therefore 6 = 9 \quad \therefore 3 = 6$$

ويكون الاتجاه الذي يوشك الجسم أن يتحرك فيه عكس اتجاه قوة الاحتكاك \hat{c} أى فى اتجاه محصلة القوتين $2\sqrt{3}$ ، 6 نيوتن ويفرض أن قياس زاوية ميل المحصلة على القوة التى مقدارها $2\sqrt{3}$ يساوى 60°

$$\therefore \theta = 60^\circ \quad \therefore \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{100 \text{ ملى}}{100 \text{ ملى} + 2\sqrt{3} \times 2} = \frac{100 \text{ ملى}}{100 \text{ ملى} + 4\sqrt{3}}$$

مثال ٦

وضع جسم وزنه (w) على مستوٍ أفقى خشن وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى معلوم وهو (θ) ، شد الجسم بقوة تميل على المستوى الأفقى لأعلى بزاوية قياسها غير معلوم وليكن (H) فأصبح الجسم على وشك الحركة أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى $\frac{w \sin \theta}{1 - \cos \theta}$ و ما ل ثم أوجد أصغر مقدار لهذه القوة والشرط اللازم لذلك.

الحل

\therefore قياس زاوية الاحتكاك $= \theta$

$$\therefore \text{معامل الاحتكاك } (\mu_s) = \tan \theta = \frac{\text{مال}}{\text{منا}}$$

$$\therefore \text{مقدار قوة الاحتكاك النهائى} = \mu_s \times \text{مال} = \frac{\text{مال}}{\text{منا}} \times \text{مال}$$

وبتحليل القوة \vec{F} إلى مركبتين فى اتجاهين متعامدين مقداراهما $w \sin \theta$ ، $w \cos \theta$

\therefore معادلتا الاتزان هما : $w \sin \theta = \mu_s \times \text{مال}$

$$(1) \quad w \sin \theta = \mu_s \times \text{مال}$$

$$(2) \quad w \cos \theta = \text{مال}$$

$$\text{من (1)} : \therefore \mu_s = \frac{w \sin \theta}{\text{مال}}$$

تذكر أن

$$\text{منا } (H - w) = \text{مال } H + \text{مال } H$$

$$\text{، منا } (H + w) = \text{مال } H - \text{مال } H$$

وبالتعويض في (٢) :

$$\therefore \frac{Q \sin \theta \sin \alpha}{\sin \alpha} + Q \sin \theta \cos \alpha = Q \sin \theta \sin \alpha + Q \sin \theta \cos \alpha = Q \sin \theta$$

$$\therefore Q \sin \theta \sin \alpha + Q \sin \theta \cos \alpha = Q \sin \theta \sin \alpha + Q \sin \theta \cos \alpha$$

$$\therefore Q \sin \theta \sin \alpha = Q \sin \theta \sin \alpha \quad \therefore \frac{Q \sin \theta}{\sin \alpha} = Q \sin \theta$$

وحيث أن المطلوب هو إيجاد أصغر مقدار

لهذه القوة فهذا يستلزم أن يكون $\sin \alpha = 1$

$$\therefore \sin \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 90^\circ$$

\therefore أصغر مقدار لهذه القوة هي : $Q \sin \theta$

$$\therefore \sin \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 90^\circ$$

$$\therefore \sin \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 90^\circ$$

\therefore الشرط اللازم هو :

أن يكون قياس زاوية ميل القوة على الأفقى لأعلى يساوى قياس زاوية الاحتكاك.

حل آخر :

الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هي : \vec{Q} ، \vec{W} ، \vec{R}

حيث \vec{R} هو محصلة رد الفعل العمودى \vec{R}

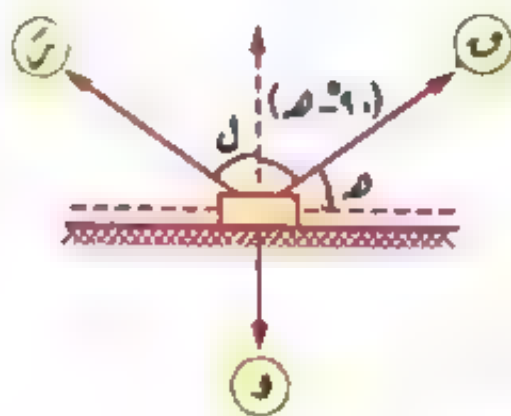
، قوة الاحتكاك النهائى \vec{H}

، \therefore الجسم على وشك الحركة

وباستخدام قاعدة لامى :

$$\therefore \frac{Q \sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} = \frac{W}{\sin \gamma}$$

$$\therefore \frac{Q \sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta} = \frac{W}{\sin \gamma}$$



ويكون أصغر مقدار للقوة عندما : $\text{مأ} (هـ - ل)$ أكبر ما يمكن

أي أن : $\text{مأ} (هـ - ل) = ١$

∴ أصغر مقدار للقوة $و = و\text{مال}$

وذلك عندما يكون : $\text{مأ} (هـ - ل) = ١$

∴ $هـ = ل$

أي أن : $هـ - ل = ٠$

∴ الشرط اللازم هو :

أن يكون قياس زاوية ميل القوة على الأفقى لأعلى يساوى قياس زاوية الاحتكاك.

ملاحظة

من المثال السابق نجد أن القوة غير معلومة الاتجاه ولذلك فإن لكل اتجاه يجب أن يكون مقدار القوة بقيمة معينة تجعل الجسم على وشك الحركة ولتعدد الاتجاهات تتعدد مقادير هذه القوى التى تجعل الجسم على وشك الحركة [مقدار كل منها $و = \frac{و\text{مال}}{\text{مأ} (هـ - ل)}$ وتميل بزاوية $هـ$ على الأفقى لأعلى].

وبوضع $\text{مأ} (هـ - ل) = ١$ (أكبر ما يمكن) يكون $هـ = ل$ وتكون $و = و\text{مال}$ (أقل ما يمكن).

أي أن :

مقدار أقل قوة تكفى لجعل جسم وزنه $(و)$ موضوع على مستوى أفقى خشن على وشك الحركة هي $و = و\text{مال}$

وهى القوة التى تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها يساوى قياس زاوية الاحتكاك $(ل)$.

على مفهوم الاحتكاك - التزان جسم على مستوى أفقى خشن



[١] من أسئلة الكتاب المدرس

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) زاوية الاحتكاك هي الزاوية المحصورة بين عندما يكون الاحتكاك نهائى.

(أ) رد الفعل المحصل وقوة الاحتكاك السكونى النهائى.

(ب) رد الفعل المحصل ورد الفعل العمودى.

(ج) رد الفعل المحصل ووزن الجسم.

(د) رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك السكونى.

٢) معامل الاحتكاك السكونى هو

(أ) قوة مضادة لاتجاه القوة المؤثرة على الجسم.

(ب) محصلة قوتى رد الفعل العمودى والاحتكاك.

(ج) نسبة مقدار قوة الاحتكاك النهائى إلى مقدار قوة رد الفعل العمودى.

(د) نسبة مقدار قوة رد الفعل المحصل إلى مقدار قوة الاحتكاك النهائى.

٣) رد الفعل المحصل هو محصلة كل من

(أ) وزن الجسم ورد الفعل العمودى.

(ب) وزن الجسم وقوة الاحتكاك السكونى النهائى.

(ج) قوة رد الفعل العمودى وقوة الاحتكاك السكونى النهائى.

(د) قوة الاحتكاك الحركى ورد الفعل العمودى.

٤) ظل الزاوية المحصورة بين قوة رد الفعل العمودى ورد الفعل المحصل عندما يكون

الاحتكاك نهائى تسمى

(أ) زاوية الاحتكاك.

(ب) معامل الاحتكاك.

(ج) قوة الاحتكاك.

(د) قوة الاحتكاك النهائى.

٥) يتوقف معامل الاحتكاك بين جسمين على الجسمين المتلامسين.

(أ) شكل

(ب) وزن

(ج) حجم

(د) طبيعة

٦ إذا كان : $\mu_s = 0.4$ ، $\mu_k = 0.3$ فما معامل الاحتكاك السكوني والحركي على الترتيب لجسمين متلامسين فإن

(ب) $\mu_s > \mu_k$

(أ) $\mu_s = \mu_k$

(د) $1 = \mu_s + \mu_k$

(ج) $\mu_s < \mu_k$

٧ إذا كان قياس الزاوية بين رد الفعل العمودي ورد الفعل المحصل θ عندما يكون الاحتكاك نهائى وقياس الزاوية بين رد الفعل المحصل وقوة الاحتكاك السكونى النهائى $\theta = 2$ فإن معامل الاحتكاك السكونى =

(د) $\frac{1}{4}$

(ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(ب) $\sqrt{2}$

(أ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

٨ إذا أثرت قوة أفقية مقدارها ٥ ث كجم على جسم وزنه ١٥ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن فجعلته على وشك الحركة فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى = $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

(د) ١٠

(ج) ٢

(ب) $\frac{1}{3}$

(أ) $\frac{1}{4}$

٩ يدفع وائل صندوقاً ممتلئاً بالكتب إلى سيارته على طريق أفقى فإذا كان وزن الصندوق والكتب ٨٠ نيوتن ومعامل الاحتكاك السكونى بين الطريق والصندوق ٠.٢٥ فإن مقدار القوة الأفقية التى يدفع بها وائل الصندوق حتى يكون على وشك الحركة تساوى نيوتن.

$80 \times 0.25 = 20$

(د) ٢٢٠

(ج) ٨٠

(ب) ٦٠

(أ) ٢٠

١٠ وضع جسم وزنه (و) ث كجم على مستوى أفقى خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{2}{5}$ فإذا أثرت قوة أفقية مقدارها ٤٥ ث كجم على الجسم جعلته على وشك الحركة فإن وزن الجسم = ث كجم.



(د) ٢٢٥

(ج) ١١٢.٥

(ب) ٩٠

(أ) ٢٢.٥

$\frac{45}{\frac{2}{5}} = \frac{45 \times 5}{2} = 112.5$



١١ في الشكل المقابل :

البكرة صغيرة ملساء ، المستوى أفقى خشن
والمجموعة على وشك الحركة فيكون معامل

الاحتكاك السكونى = $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

- (١) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{4}$

١٢ وضع جسم وزنه ٣٦٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم = $\frac{1}{3}$ فإن مقدار قوة الاحتكاك = نيوتن.

- (أ) صفر (ب) ٦٠ (ج) ١٢٠ (د) ٣٦٠

١٣ يدفع قتي حجراً وزنه ٥٦ نيوتن بقوة أفقية مقدارها ٤٢ نيوتن على رصيف فكان الحجر على وشك الحركة أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الحجر والرصيف. $\frac{2}{3}$

١٤ وضع جسم وزنه ٢٧ ثقل كجم على مستو أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم $\frac{1}{3}$ أوجد مقدار القوة الماسة للمستوى التى توشك أن تحرك الجسم. ٩ ثقل كجم.

١٥ وضع جسم وزنه ١٢.٥ ث.كجم على مستو أفقى خشن وكان معامل الاحتكاك بينهما = $\frac{2}{3}$ أثرت قوة أفقية مقدارها ٧.٥ ث.كجم على الجسم وظل متزاناً. أثبت أن الجسم لا يكون على وشك الحركة عندئذ وأن مقدار الاحتكاك عندئذ = $\frac{5}{3}$ قيمتها النهائية.

١٦ جسم وزنه ٤٥ ث.كجم موضوع على مستو أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم = $\frac{1}{3}$ أوجد :

١٧ مقدار القوة الأفقية التى تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى.

١٨ مقدار واتجاه رد الفعل المحصل. ١٥٠ ، ٣٧٢٠ ث.كجم ، ٢٠ مع الرأسى.

١٩ وضع جسم وزنه ١٢ نيوتن على نضد أفقى وربط بخيط أفقى يمر على بكرة صغيرة ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ٤ نيوتن. فإذا كان الجسم متزاناً على النضد فأوجد قوة الاحتكاك. وإذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{1}{3}$ هل يكون الجسم على وشك الحركة عندئذ ؟ فسر إجابتك. ح = ٤ نيوتن ، على وشك الحركة.

وضعت كتلة خشبية وزنها ٦ ثقل كجم على نضد أفقى وربطت بخيط أفقى يمر على بكره
ملساء مثبتة عند حافة النضد ويتدلى من طرفه ثقل مقداره ١.٥ ثقل كجم فإذا كانت كتلة
الخشبية متزنة على النضد فعين قوة الاحتكاك وقوة رد الفعل العمودى وإذا علم أن معامل
الاحتكاك السكونى بين الكتلة والنضد يساوى $\frac{1}{3}$ فهل كان الجسم على وشك الحركة أم لا ،
« ١.٥ ثقل كجم ، ٦ ثقل كجم ، ليس على وشك الحركة.

وضع جسم وزنه ١٤ ثقل كجم على مستو أفقى خشن ولما شد هذا الجسم بقوة أفقية مقدارها
٧ ثقل كجم أصبح الجسم على وشك الحركة. فإذا وضع فوق الجسم صنجة وزنها ٦ ثقل كجم
فما مقدار القوة الأفقية التى توشك أن تحرك الجسم والصنجة فوقه ؟ ٢.٩ ثقل كجم ، ١٠.٨ ثقل كجم ،
 $\frac{3}{4}$ ثقل كجم ، ٢.٠ ثقل كجم

جسم مقدار وزنه ٢٤٠ ث. كجم موضوع على مستو أفقى خشن ويراد شده بحبل
يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها 30° فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى
 $\frac{2}{3}$ فأوجد مقدار الشد الذى يلزم لجعل الجسم على وشك الحركة. ١٢٠٠ ث. كجم.

وضع جسم كتلته ٢٤ كجم على مستو أفقى خشن وأثرت عليه قوة أفقية مقدارها ٨ ث. كجم
فجعلته على وشك الحركة. أوجد مقدار القوة التى تميل على الأفقى بزاوية قياسها 45°
وتكفى لجعل الجسم على وشك الحركة. ٢٢.٦ ث. كجم.

وضع جسم كتلته ٦٠ جم على مستو أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك السكونى بينه
وبين الجسم تساوى 30° أوجد :
① القوة الأفقية التى تكفى لجعل الجسم على وشك الحركة.
② القوة التى تميل على المستوى لأعلى بزاوية قياسها 30° وتكفى لجعل
الجسم على وشك الحركة.

جسم وزنه ١٦ ث كجم موضوع على مستو أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى
بينه وبين الجسم = $\frac{1}{4}$ أوجد :

① مقدار القوة التى تؤثر على الجسم فى اتجاه يميل على الأفقى لأعلى بزاوية جيب
تمامها $\frac{3}{5}$ وتجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى.
② مقدار واتجاه رد الفعل المحصل.

١٧٢٢ ، ٥٥ ، ١٧٢٢ ، ٥٥ ، ١٤٦ مع الرأسى

الدرس الأول



١٣ وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت فيه قوة مقدارها ١٥ نيوتن فى اتجاه يصنع زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ لأعلى فظل الجسم متزنًا. أوجد مقدار قوة الاحتكاك. وإذا زادت هذه القوة حتى أصبح مقدارها ٢٠ نيوتن وأصبح الجسم عندئذٍ على وشك الحركة. فأوجد معامل الاحتكاك السكونى.

$$١٢٠ \text{ نيوتن} ، ٢٠ ، \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

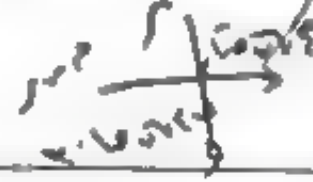
١٤ وضع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت فيه قوة مقدارها ٤٠ نيوتن فى اتجاه يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع المستوى لأسفل فجعلت الجسم فى حالة اتزان نهائى. أوجد : ① معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى وكذا قياس زاوية الاحتكاك.

$$١٢٠ \text{ نيوتن} ، ٢٠ ، \frac{1}{3}$$

② رد الفعل المحصل عندئذٍ.

١٥ وضع جسم وزنه ١٠ نيوتن على نضد أفقى خشن. إذا أثرت عليه قوة مقدارها ٨ نيوتن فى اتجاه يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن الجسم يكون على وشك الحركة على المستوى. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى ، أما إذا أثرت عليه قوة مقدارها ١٢ نيوتن فى الاتجاه المضاد للقوة السابقة فإنه يصبح على وشك الحركة أيضًا

$$٤٠ \text{ نيوتن} ، \frac{3\sqrt{2}}{4}$$



أوجد مقدار

١٦ جسم كتلته ٦٠ كجم وضع على مستوٍ أفقى خشن. إذا أثرت عليه قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم فى اتجاه يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° لأعلى فإنه يصبح على وشك الحركة وإذا أثرت عليه قوة مقدارها ٦٠ ث.كجم فى الاتجاه المضاد للقوة الأولى فإنه يصبح على وشك الحركة أيضًا. أوجد معامل الاحتكاك السكونى ومقدار الزاوية

$$٢٠ ، \frac{1}{3}$$

١٧ فى الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٠ نيوتن إذا كانت ٣٠° تصنع زاوية

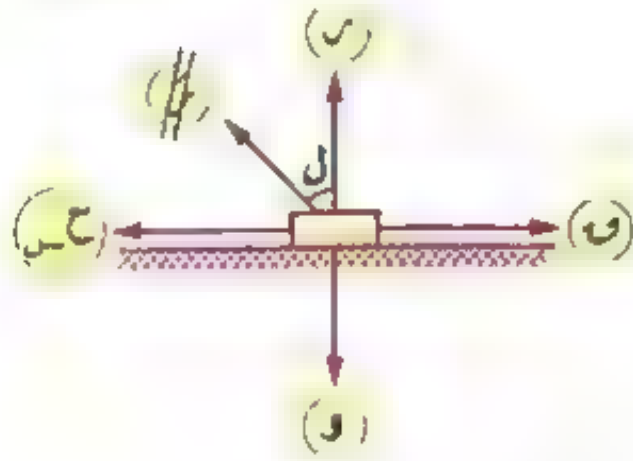
مع الرأسى قياسها ٣٠° لأعلى وتجعل الجسم

على وشك الحركة على سقف الحجرة وكان معامل

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}$$

أوجد : قيمة

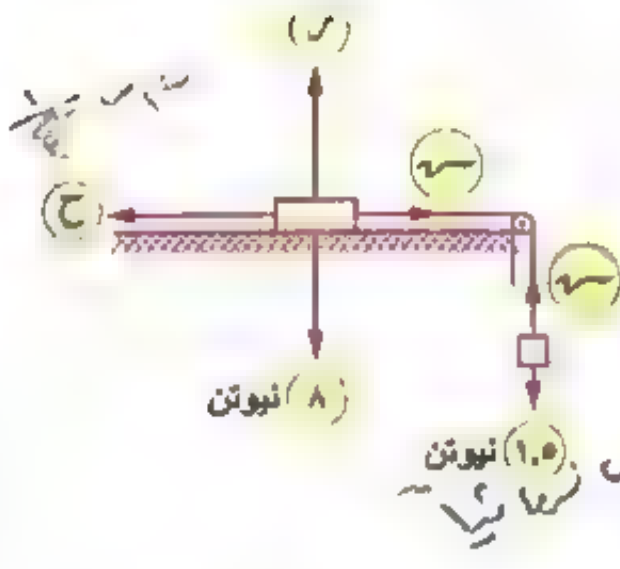
$$٢٠ ، \frac{3\sqrt{2}}{4}$$



٧ في الشكل المقابل :

إذا كان الاحتكاك نهائياً وكان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى هو μ_s فإن جميع العبارات الآتية صحيحة ما عدا

- (أ) $\mu_s = 1$ ~~(ب) $\mu_s = 0$~~ (ج) $\mu_s = 1$ (د) $\mu_s = 0$

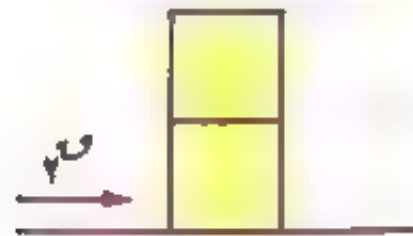


٨ في الشكل المقابل :

إذا كان معامل الاحتكاك يساوي $\frac{1}{2}$ فإن
(أ) الاحتكاك = 2 نيوتن.

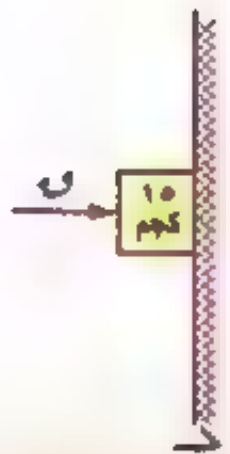
(ب) الجسم يتحرك على المستوى؟ $\mu_s = 8 \times \frac{1}{2} = 4$
(ج) الاحتكاك بين الجسم والمستوى يكون نهائياً. ليس
(د) الاحتكاك بين الجسم والمستوى يكون ليس نهائياً.

٩ الشكلان الآتيان يوضحان قالبان من نفس المادة متساويان في الكتلة والحجم موضوعان على مستوى أفقى خشن في وضعين مختلفين أثرت عليهم قوة لتجعلهم على وشك الحركة كما بالشكل فإن



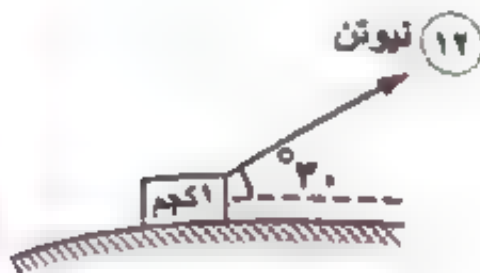
- (أ) $F_1 > F_2$ (ب) $F_1 < F_2$ (ج) $F_1 = F_2$ (د) لا يمكن المقارنة بينهما.

١٠ في الشكل المقابل :



مقدار أقل قوة أفقية F لازمة لاتزان جسم كتلته 10 كجم على حائط رأسي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوي $\frac{1}{5}$ هو ث.كجم.

- (أ) 5 (ب) 20 (ج) 3 (د) 70



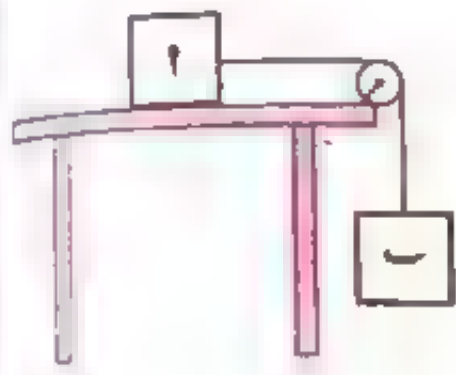
١١ في الشكل المقابل :
قالب كتلته ١ كجم يتزن على مستوى أفقى خشن وتؤثر
عليه قوة مقدارها ١٢ نيوتن تميل على الأفقى بزاوية
قياسها ٣٠° فإذا كان الجسم على وشك الحركة
فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى =

(د) $\frac{5}{3\sqrt{6}}$

(ج) $\frac{1}{12}$

(ب) $\frac{7}{3\sqrt{6}}$

(أ) $\frac{3\sqrt{2}}{19}$



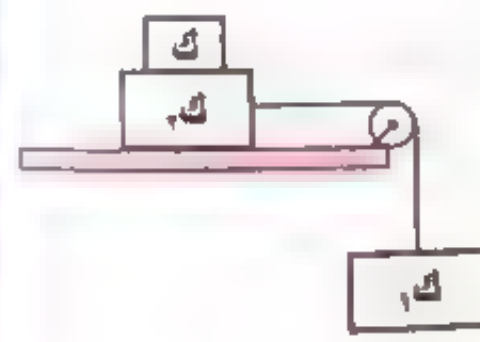
١٢ في الشكل المقابل :
إذا كانت البكرة صغيرة ملساء والمستوى أفقى خشن
وكان معامل الاحتكاك بين الجسم ١ الذى كتلته ١٠ كجم
والنضد = ٠,٢ فإن أقل قيمة لكتلة الجسم ب حتى تكون
المجموعة على وشك الحركة يساوى كجم.

(د) ٠,٢

(ج) ٤,٨

(ب) ٢,٢

(أ) ٢



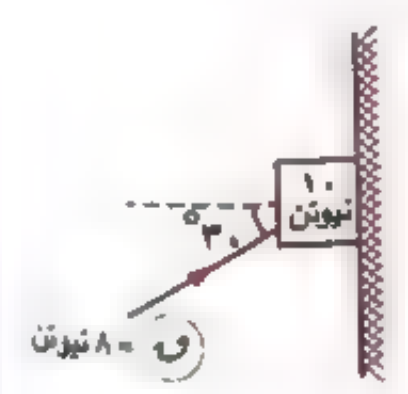
١٣ في الشكل المقابل :
إذا كانت ٥ = ٥ كجم ، ٥ = ١٠ كجم وكان معامل
الاحتكاك بين الجسم ٥ والمستوى الأفقى = ٠,١٥
فإن أقل قيمة للكتلة ٥ التى يجب وضعها على الكتلة ٥
حتى تتزن المجموعة يساوى كجم.

(د) $43\frac{1}{3}$

(ج) $10\frac{1}{3}$

(ب) $23\frac{1}{3}$

(أ) $18\frac{1}{3}$



١٤ في الشكل المقابل :
اثرث قوة ٨ مقدارها ٨ نيوتن تميل على الأفقى
بزاوية قياسها ٣٠° على جسم وزنه ١٠ نيوتن
موضوع على مستوى رأسى خشن فأصبح
الجسم على وشك الحركة فيكون معامل الاحتكاك
السكونى بين الجسم والمستوى =

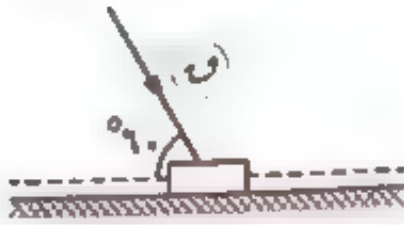
(د) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

(ج) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

(ب) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

(أ) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

(١٥) في الشكل المقابل :



إذا كانت كتلة الجسم على المستوى الأفقى ١٠ كجم
ومعامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{1}{3}$ فإن أكبر

قيمة للقوة F يمكن أن تؤثر على الجسم ويظل متزنًا هي ث. كجم.

- (أ) ٢٠ (ب) ١٥ (ج) ١٠ (د) ٥

(١٦) إذا كانت L هي قياس زاوية الاحتكاك فإن رد الفعل المحصل $R =$

(أ) $12 + \sqrt{L}$ (ب) $12 + \sqrt{L}$ قال

(ج) $12 + \sqrt{L}$

$R = 12 + \sqrt{L}$ قال

(١٩) وضع جسم كتلته ٢٦ جم على مستوٍ أفقى خشن وأصبح الجسم على وشك الحركة عندما أثرت عليه قوتان أفقيتان مقداراهما ٧ ، ٨ ثقل جم تحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° أوجد قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى. ٢٦ ٢٤°

(٢٠) وضع جسم وزنه ١٢ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم قوتان مقداراهما ٤ ، ٤ ثقل كجم ويحصران بينهما زاوية قياسها ٦٠° بحيث كانت القوتان أفقيتين واقعتين فى نفس المستوى الأفقى مع الجسم فإذا أصبح الجسم على وشك الحركة فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى وكذلك قياس زاوية الاحتكاك. ٣٠ ، $\frac{1}{3}$

(٢١) وضع جسم وزنه ٤٠ ثقل كجم على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان متعامدتان مقداراهما ٦ ، ٨ ثقل كجم فبقى الجسم متزنًا. أثبت أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن $\frac{1}{4}$

(٢٢) وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوٍ أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان مقداراهما ٢ ، ٤ نيوتن تحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° فظل الجسم ساكنًا. أثبت أن قياس زاوية الاحتكاك السكونى (ل) بين الجسم والمستوى يجب ألا يقل عن ٢٠° وإذا كان $L = ٤٥^\circ$ ، وبقي اتجاه القوتين ثابتًا ، كما بقيت القوة ٤ نيوتن دون تغيير، فعين مقدار القوة الأخرى لى يكون الجسم على وشك الحركة وعين أيضًا الاتجاه الذى يوشك الجسم أن يبدأ الحركة فيه. $20 + 6\sqrt{2}$ ، 84.44° مع القوة ٤ نيوتن

الوحدة 1

٢٣ يرتكز جسم كتلته ٧٥ جم على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم = $\frac{1}{4}$ أثرت على الجسم قوتان أفقيتان متساويتان فى المقدار وقياس الزاوية بينهما ١٢٠° فكان الجسم على وشك الحركة. أوجد مقدار كل من القوتين. ٢٥٠ ثجم.

٢٤ وضع جسم وزنه ٥ ثجم على مستوى أفقى خشن وأثرت على الجسم فى نفس المستوى قوتان ١٠ ، ٥ ثجم تحصران بينهما زاوية قياسها ١٥٠° أوجد قيمة القوة ٥ لكى تجعل الجسم على وشك الحركة وعين الاتجاه الذى يتحرك فيه الجسم إذا كان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥° ، ٣٢ ٥ ، ٥ (د هـ) = ٦٠ مع القوة الأولى.

٢٥ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى أفقى خشن قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى (ل) شد الجسم بقوة تصنع مع الأفقى زاوية قياسها (٢ ل) لأعلى جعلت الجسم على وشك الحركة. أثبت أن مقدار هذه القوة يساوى و ط ل

٢٦ وضع جسم وزنه و على مستوى أفقى خشن زاوية الاحتكاك بينه وبين المستوى قياسها ى ثم شد الجسم بحبل فى اتجاه يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها هـ برهن أن القوة التى تجعل الجسم على وشك الحركة تساوى $\frac{و ح ا ي}{م ا (ى - هـ)}$ ، واستنتج من ذلك مقدار واتجاه أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة على المستوى.

مسائل تيسر مستويات علنا من التفكير

٢٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ جسم وزنه ٢ نيوتن موضوع على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم $\frac{1}{4}$ ، أثرت عليه قوة أفقية تحاول تحريكه فإن قوة الاحتكاك \exists

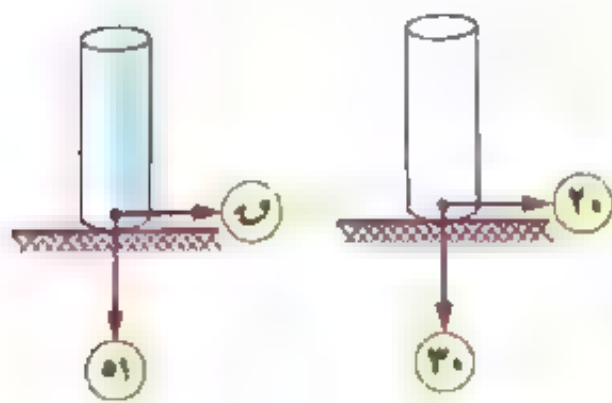
- (أ) $[\frac{1}{4} , \frac{1}{4}]$ (ب) $[١ , ٥٥]$ (ج) $[٠ , ١]$ (د) $[٠ , \frac{1}{4}]$

٢) جسم وزنه ١ نيوتن موضوع على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الجسم $\frac{2}{3}$ ، أثرت عليه قوة أفقية تحاول تحريكه
فإن قوة رد الفعل المحصل \Rightarrow

- (١) [١ ، ٠] (ب) [٢ ، ١] (ج) {٢ ، ١} (د) {٢}

٣) وضع جسم وزنه ١٠ ث.كجم على مستوى أفقى خشن وأثرت عليه قوة مقدارها ٢٠ ث.كجم تميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإن قوة الاحتكاك المتولدة عندئذٍ = ث.كجم.

- (١) صفر (ب) ١٠ (ج) $10\sqrt{3}$ (د) ٢٠



٤) في الشكل المقابل :

وضع إناء فارغ وزنه = ٣٠ نيوتن على مستوى أفقى خشن فإذا كانت القوة الأفقية التى تجعله على وشك الحركة = ٢٠ نيوتن وإذا تم ملء الإناء حتى أصبح وزنه = ٥١ نيوتن فإن القوة الأفقية التى تجعله على وشك الحركة = نيوتن.

- (١) ٢٠ (ب) ٢٤ (ج) ٤١ (د) ٧٦,٥



٥) في الشكل المقابل :

جسمان وزناهما ٥ و ٥ مصنوعان من نفس المادة وموضوعان على مستوى أفقى خشن.

أولاً : إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسمين والمستوى هما ١ م ، ٢ م على الترتيب فإن

- (١) ٢ م = ١ م (ب) ٢ م = ٥ م (ج) ٢ م = $\frac{1}{5}$ م (د) ١ م = ٢ م + ١ م

ثانياً : إذا كانت قوتا الاحتكاك النهائى بين الجسمين والمستوى هما ١ م ، ٢ م على الترتيب فإن :

- (١) ٢ م = ١ م (ب) ٢ م = ٥ م (ج) ٢ م = $\frac{1}{5}$ م (د) ١ م = ٢ م + ١ م

٦ جسم وزنه (و) على وشك الحركة على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينهما = م تحت تأثير قوة أفقية مقدارها (و) فيكون جسم وزنه (و + ٢) من نفس المادة على وشك الحركة على نفس المستوى الأفقى تحت تأثير قوة أفقية مقدارها
 (أ) $٢ + و$ (ب) $٢ و$ (ج) $و٢$ (د) $٢ و١ و$

٧ أثرت قوة أفقية $و٢$ على جسم وزنه (و) موضوع على مستوى أفقى خشن فكان الجسم على وشك الحركة وإذا أثرت نفس القوة $و٢$ على جسم آخر وزنه (و٣) موضوع على نفس المستوى الأفقى فكان الجسم أيضاً على وشك الحركة فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسمين والمستوى هما $م١$ ، $م٢$ على الترتيب فأتى من الجمل الآتية صحيح ؟

(أ) $و١ = و٣$ (ب) $م١ = م٢$
 (ج) $\frac{و٢}{م١} = \frac{و٢}{م٢}$ (د) $و١ + م١ = و٣ + م٢$

٨ إذا وضع جسم وزنه ٨ نيوتن على مستو أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما $\frac{١}{٢}$ ، $و١$ هي مقدار القوة المماسية للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة ، $و٢$ هي مقدار أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة فإن : $\frac{و١}{و٢} = \dots\dots\dots$
 (أ) ١ (ب) ٢ (ج) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢}$

٩ إذا أثرت قوة أفقية (و) على جسم وزنه (و) موضوع على مستوى أفقى خشن زاوية احتكاكه (ل) وكان الجسم على وشك الحركة فإن رد الفعل المحصل (م) =
 (أ) و طال (ب) و قُال (ج) و قُال (د) و مال

٢٨ وضع جسم وزنه $\frac{٢}{٣}$ ٦٦ نيوتن على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك بينهما يساوى $\frac{٢}{٤}$ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٤٠ نيوتن وتميل على الأفقى لأعلى بزاوية حادة قياسها θ فإذا كان الجسم على وشك الحركة فما قيمة θ
 «٢٦٥٢»

٢٩ وضع جسم A وزنه 2 kg على نضد أفقى خشن وربط بأحد نهايتى خيط خفيف يمر على بكرة ملساء B مثبتة عند حافة النضد وعند تعليق جسم وزنه 1 kg من الطرف الآخر للخيط كان الجسم A على وشك الحركة على النضد. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم A والنضد وإذا ربط الجسم A من الجهة الأخرى بأحد نهايتى خيط آخر خفيف يمر على بكرة صغيرة ملساء C عند الحافة المقابلة للنضد. أوجد الثقل الواجب تعليقه بالطرف الآخر للخيط حتى يكون الجسم A على وشك الحركة مع بقاء الجسم المعلق بالخيط الآخر (الجسم A والبكرتان B ، C على استقامة واحدة).
 $\frac{1}{4}$ ، 2 kg ،

٣٠ وضع جسم على أرض أفقية وأثرت عليه قوة تميل على الأرض بزاوية قياسها 30° وموجهة إلى أسفل فوجد أن الجسم قد أصبح على وشك الحركة ولما زادت مقدار القوة إلى الضعف وقياس زاوية ميلها إلى الضعف أيضاً وجد أن الجسم على وشك الحركة أيضاً. أثبت أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والأرض يساوى 0.1 تقريباً.



2

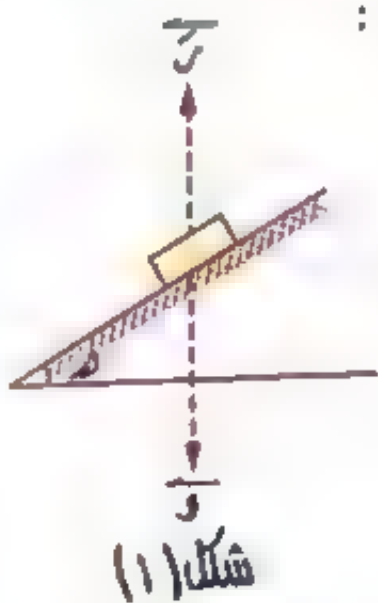
اتزان جسم على مستوي مائل خشن

- إذا وضع جسم مقدار وزنه W على مستوي مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ واتزن الجسم على المستوى فإنه يكون متزنًا تحت تأثير قوتين هما :

① قوة وزن الجسم \vec{W} وتعمل رأسيًا لأسفل.

② قوة رد الفعل المحصل \vec{R} وتعمل في عكس اتجاه \vec{W}

(كما في شكل (١)) ويكون $\vec{R} = \vec{W}$



شكل (١)

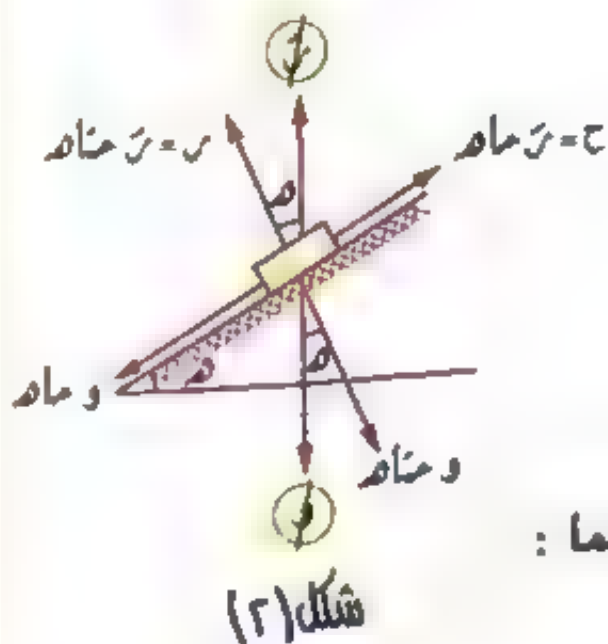
- ويتحليل \vec{R} إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين هما :

① قوة الاحتكاك \vec{C} وتعمل في اتجاه موازى للمستوى لأعلى

نمط : $\vec{C} = \vec{R} \sin \theta$

② قوة رد الفعل العمودى \vec{R}' وتعمل في اتجاه عمودى على المستوى لأعلى

نمط : $\vec{R}' = \vec{R} \cos \theta$ (كما في شكل (٢))



شكل (٢)

- ويتحليل \vec{W} إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين فإن مقداريهما :

① $W \sin \theta$ في الاتجاه العمودى على المستوى لأسفل.

② $W \cos \theta$ في اتجاه يوازى المستوى لأسفل (كما في شكل (٢))

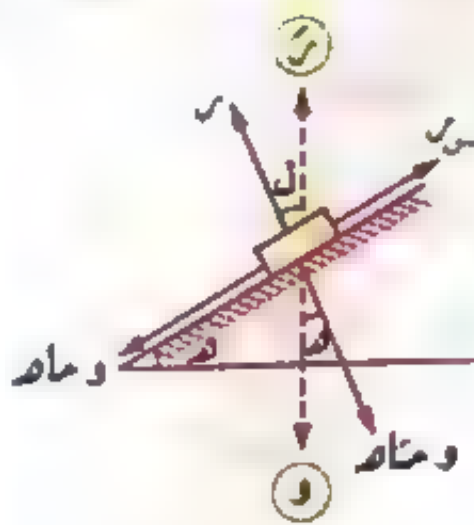
فإن : معادلتى اتزان الجسم هما : $\vec{C} = W \sin \theta$ ، $\vec{R}' = W \cos \theta$

ملاحظة

إذا كان الجسم على وشك الانزلاق أى على وشك الحركة لأسفل المستوى بتأثير وزنه فقط فإن الاحتكاك يكون نهائياً ومقداره $H = H_s$ وتصبح معادلتا اتزان الجسم هما :

(١) $N = W \cos \theta$ ، (٢) $H_s = W \sin \theta$

وبقسمة (٢) على (١) ينتج أن :



$$\therefore H_s = W \sin \theta$$

$$H_s = \frac{W \sin \theta}{\cos \theta}$$

، $\therefore H_s = \tan \theta$ حيث $\tan \theta$ هو قياس زاوية الاحتكاك $\therefore \tan \theta = \mu$ $\therefore \mu = \tan \theta$ أى أن : قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

ومن ذلك يمكن استنتاج القاعدة الآتية :

قاعدة

إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط فإن قياس زاوية الاحتكاك يساوى قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

فمثلاً : إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط

عندما كانت زاوية ميل المستوى على الأفقى قياسها 60°

فإن : قياس زاوية الاحتكاك $= 60^\circ$ ويكون معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم

والمستوى $\mu = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

مثال ١

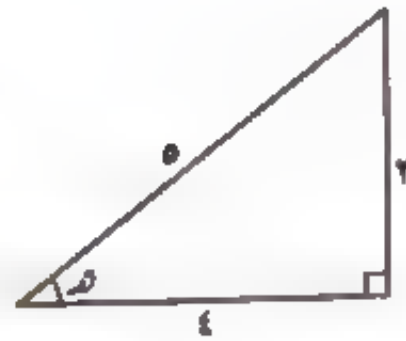
وضع جسم وزنه 90 ثقل جم على مستوى مائل خشن ولوحظ أن الجسم أصبح على وشك الحركة تحت تأثير وزنه فقط عندما كان ظل زاوية ميله على الأفقى $\frac{2}{3}$ فإذا وضع نفس الجسم على مستوى أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{2}{3}$ وتقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة. فأوجد :

- ① مقدار قوة الشد. ② مقدار قوة رد الفعل العمودى. ③ مقدار قوة رد الفعل المحصل.

∴ قياس زاوية الاحتكاك = قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

، ∴ الجسم وضع على مستوى أفقى له نفس خشونة المستوى المائل

∴ معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى الأفقى (م) = $\frac{2}{3}$



وبتحليل القوة \vec{F} (قوة الشد) إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين

، ∴ الجسم على وشك الحركة

$$u = v + w,$$

من (١) : $r = \frac{6}{5}$ و

∴ مقدار قوة الشد = ٥٠ ثقل جرام

$$70 = 50 \times \frac{7}{5} = 70 \quad \therefore \text{صح}$$

∴ مقدار قوة رد الفعل العمودي = ٦٠ ثقل جرام

$$\sqrt{13} \sqrt{20} = \frac{4}{9} + 1 \sqrt{60} = 2\sqrt{15} + 1\sqrt{15} = 3\sqrt{15} \therefore$$

∴ مقدار رد الفعل المحصل = ۲۰ ۱۳۲ ثقل جرام.

ملاحظة

عند وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) وكان قياس زاوية الاحتكاك (ل) فإننا نقارن بين هـ ، ل لتحديد ما إذا كان الجسم متزنًا أم متحرك بالفعل.

① إذا كانت : هـ > ل فإن الجسم يستقر على المستوى (ساكن)

أى أن : (متزن وليس على وشك الحركة)

② إذا كانت : هـ = ل فإن الجسم يكون على وشك الانزلاق

أى أن : (متزن وعلى وشك الحركة)

③ إذا كانت : هـ < ل فإن الجسم لا يمكن أن يتزن أى يكون متحركًا لأسفل المستوى.

مثال ٢

وضع جسم على مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{5}$ وضع مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يبقى متزن على المستوى.

الحل

$$\frac{\sqrt{3}}{5} = \mu = \tan \alpha = \tan 30^\circ$$

$$\therefore \mu < \tan 30^\circ$$

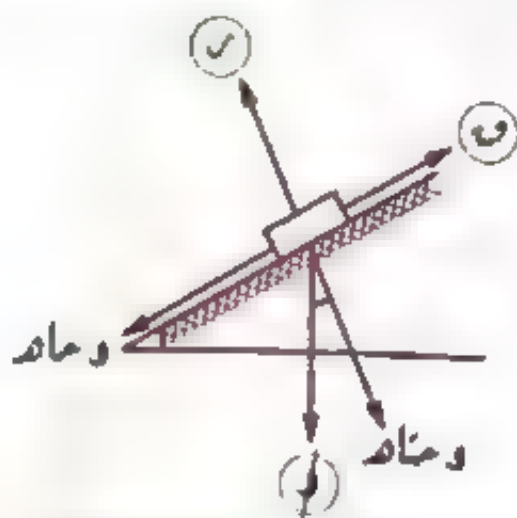
$$\therefore \mu = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

\therefore الجسم لا يمكن أن يبقى متزن على المستوى.

ملاحظة

إذا أثرت على الجسم قوة مقدارها و فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى المستوى وما زال الجسم متزنًا فإننا نقارن بين و ، و ما هـ لتعيين مقدار واتجاه قوة الاحتكاك.



① إذا كانت : $u < w$ فإن الجسم يميل للحركة لأعلى المستوى
 ∴ اتجاه u يكون لأسفل المستوى ، $u = w + u$ و u ما

② إذا كانت : $u > w$ فإن الجسم يميل للحركة لأسفل المستوى
 ∴ اتجاه u يكون لأعلى المستوى ، $u = w + u$ و u ما

③ إذا كانت : $u = w$ فإن الجسم يكون متزنًا على المستوى وقوة الاحتكاك (0)
 عندئذ تكون معدومة.

مثال ٣

وضع جسم مقدار وزنه ٦ نيوتن على مستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° ومعامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى يساوي $\frac{3}{4}$ ، أثرت على الجسم قوة تعمل في اتجاه أكبر ميل للمستوى لأعلى ومقدارها ٤ نيوتن. فإذا كان الجسم متزنًا عيّن قوة الاحتكاك وبينها إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا.

الحل

بتحليل قوة الوزن w إلى مركبتين هما :

① المركبة المماسية في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أسفل

$$\text{ومقدارها } w \sin \theta = 6 \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ نيوتن}$$

② المركبة العمودية على المستوى ومقدارها $w \cos \theta$

$$= 6 \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$

وبالمقارنة بين مقدار المركبة المماسية للوزن $w \sin \theta = 3$ نيوتن ، مقدار القوة المؤثرة على الجسم في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى $u = 4$ نيوتن
 نجد أن : $u > w \sin \theta$

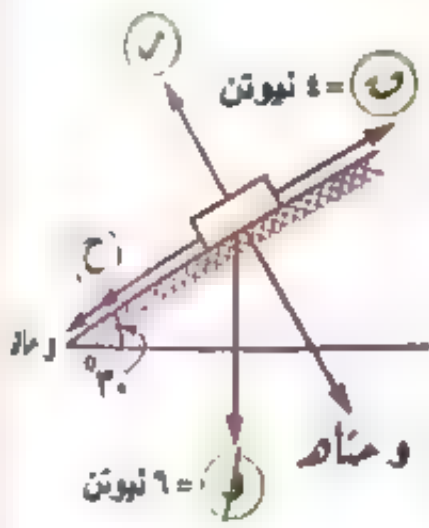
∴ الجسم يميل إلى التحرك لأعلى المستوى ولذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك u في عكس الاتجاه أي في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل ويكون معادلًا لوزن الجسم هما :

$$u = w \sin \theta + u = 3 + 1 = 4$$

$$\therefore u = 1 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore u = 6 \sin 30^\circ = 3$$

$$\therefore u = 3\sqrt{3} \text{ نيوتن}$$



∴ مقدار الاحتكاك = ١ نيوتن ويعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأسفل
وللتعرف على ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا

نوجد مقدار قوة الاحتكاك النهائي

$$F_s = F_r = \mu_s \times F_n = \frac{3\sqrt{2}}{4} \times 2\sqrt{2} = 3 \text{ نيوتن}$$

فتبدل أن: $F_s > F_r$

أي أن: الاحتكاك غير نهائي

∴ الجسم لا يكون على وشك الحركة.

لا تخطأ أن

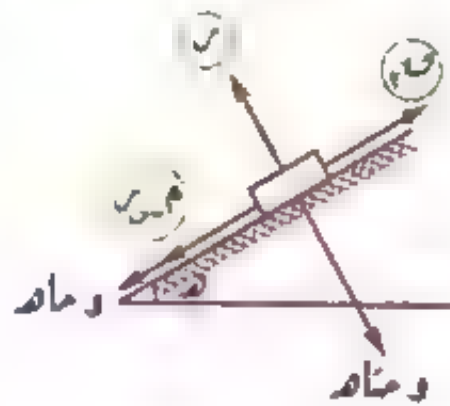
* إذا كان: $F_s > F_r$ فإن الجسم متزن
وليس على وشك الحركة.

* إذا كان: $F_s = F_r$ فإن الجسم متزن
وعلى وشك الحركة.

ملاحظات

- إذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى أصغر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم يستقر على المستوى (حيث لا يكون الاحتكاك نهائياً) ويمكن جعل الاحتكاك نهائياً بأن تؤثر على الجسم بقوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى كما يلي:

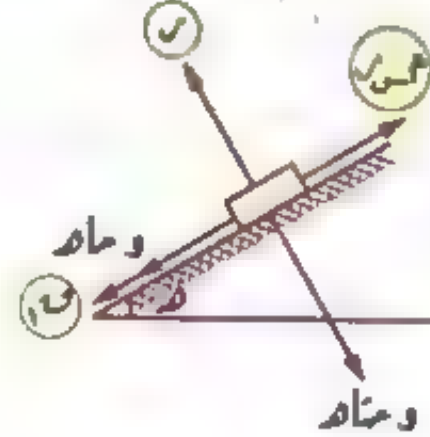
• القوة F تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى.



معادلتا الاتزان:

$$F + f = W \sin \alpha, \quad N = W \cos \alpha$$

• القوة F تجعل الجسم على وشك الحركة لأسفل.



معادلتا الاتزان:

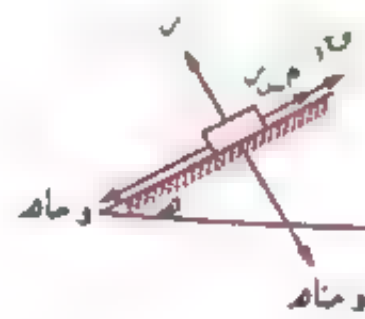
$$F + W \sin \alpha = f, \quad N = W \cos \alpha$$

- * إذا أثرت على الجسم قوة في اتجاه خط أكبر ميل لأسفل أقل من F أو لأعلى أقل من F فإن الجسم يظل ساكناً.

- إذا كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى أكبر من قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير وزنه فقط ويمكن جعل الجسم في حالة اتزان نهائى أى على وشك الحركة لأسفل أو لأعلى المستوى بالتأثير عليه بقوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى كما يلي:

الوحدة 1

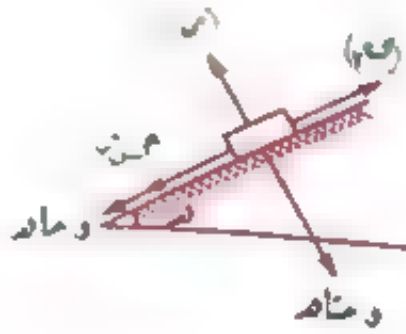
• القوة Q عندها الجسم على وشك الانزلاق وهي أقل قوة تحفظ توازن الجسم.



معادلتا الاتزان :

$$P = Q + f, \quad N = P \cos \alpha$$

• القوة Q تجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى وهي أكبر قوة تحفظ توازن الجسم.



معادلتا الاتزان :

$$P = Q + f, \quad N = P \cos \alpha$$

• إذا أثرت على الجسم قوة في اتجاه خط أكبر ميل لأعلى أكبر من Q وأقل من Q فإن الجسم يظل ساكناً. أي أن : قيم Q التي تجعل الجسم في حالة اتزان $Q \in [Q_1, Q_2]$

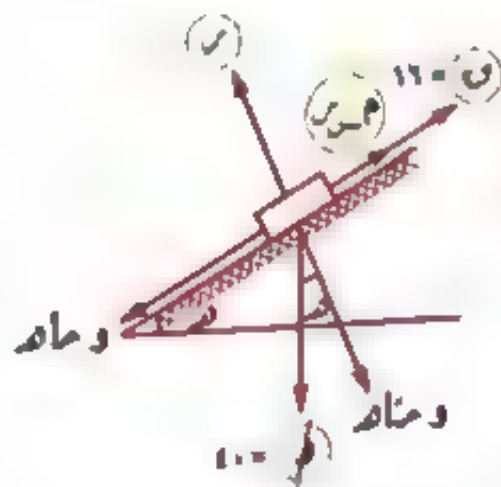
• تتعدى قوة الاحتكاك إذا كانت القوة التي تعمل في اتجاه خط أكبر ميل لأعلى

$$Q = P \sin \alpha = \frac{P}{2}$$

مثال ٤

يرتكز جسم وزنه ٤٠ نيوتن على مستوي مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{3}{4}$ فإذا كانت أقل قوة تعمل في اتجاه المستوى لأعلى وتحفظ توازن الجسم تساوي ١٦ نيوتن. فتوجد معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوي.

الحل



بفرض أن Q هي أقل قوة تعمل في اتجاه المستوى لأعلى وتحفظ توازن الجسم

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل المستوى

∴ الاحتكاك يكون نهائياً ومقداره $f = P \sin \alpha$ ويعمل في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى

∴ معادلنا اتران الجسم هما :

(١) $r = w \text{ حاه}$

(٢) ∴ $r = \frac{4}{5} \times 40 = 32 \text{ نيوتن}$ ، $w + m_r = w \text{ حاه}$

∴ $32 + 16 = m_r = \frac{2}{5} \times 40$ ∴ $32 = m_r = 8$

∴ $m_r = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ ∴ معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى = $\frac{1}{4}$

مثال ٥

وضع جسم وزنه ١٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل خشن تؤثر عليه قوة في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى. فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما $w = 6$ ثقل كجم ويكون على وشك الحركة إلى أسفل المستوى عندما $w = 4$ ثقل كجم **أوجد :**

(١) قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

(٢) معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى.

الحل

• عندما $w = 6$ ثقل كجم يكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى ويكون الاحتكاك نهائياً ويعمل إلى أسفل المستوى

∴ معادلنا اتران هما :

(١) $r = w \text{ حاه}$ ∴ $r = 10 = w \text{ حاه}$

(٢) $w + m_r = 6$ ∴ $6 = m_r + 10 \text{ حاه}$

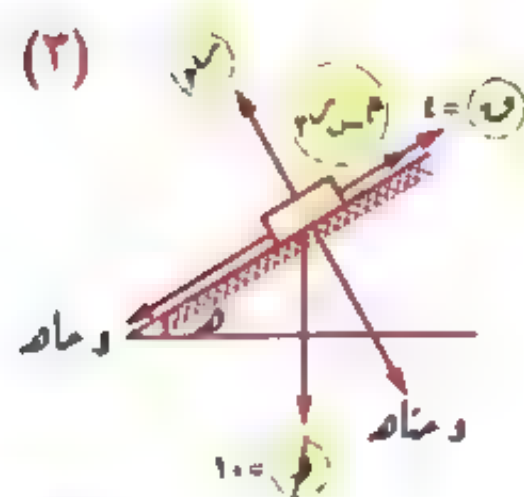
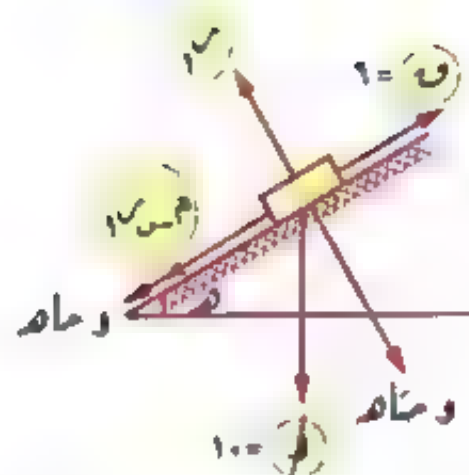
بالتعويض من (١) في (٢) :

∴ $6 = m_r + 10 \text{ حاه}$

• عندما $w = 4$ ثقل كجم يكون الجسم على وشك

الحركة إلى أسفل المستوى ويكون الاحتكاك نهائياً ويعمل في اتجاه المستوى لأعلى

∴ معادلنا اتران هما : $m_r = w \text{ حاه}$

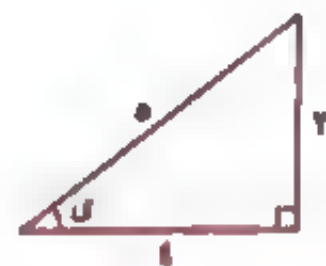
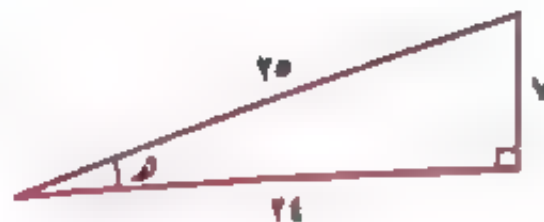
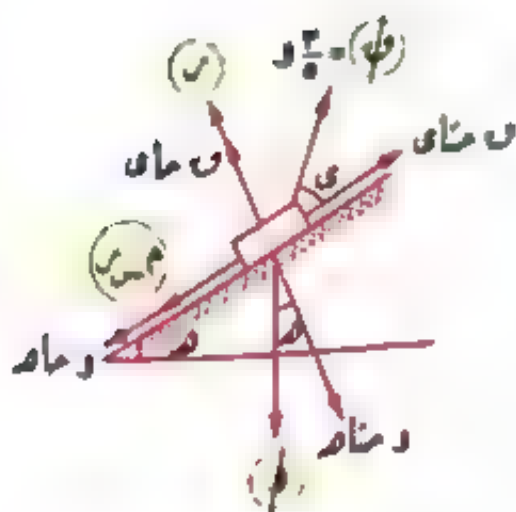


- (٤) $\therefore 10 \text{ م} = 10 \text{ م}$
- $\therefore 10 \text{ م} = 10 \text{ م} + 4 \text{ م}$
- (٥) $\therefore 10 \text{ م} = 10 \text{ م} - 10 \text{ م}$
- (٦) بالتعويض من (٤) في (٥) : $\therefore 10 \text{ م} - 10 \text{ م} = 4 \text{ م}$
- بجمع (٣) ، (٦) ينتج أن : $10 = 20 \text{ م}$
- $\therefore 10 \text{ م} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 10 \text{ م}$
- $\therefore 20 = 10$
- \therefore قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى 20°
- وبالتعويض في (٣) : $\therefore 10 \text{ م} = 10 \text{ م} + 20 \text{ م}$
- $\therefore 10 \text{ م} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 10 \text{ م}$
- \therefore معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\frac{37}{10}$

مثال ٦

وضع جسم وزنه (٩) على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{7}{24}$ ربط الجسم في حبل وشد الحبل إلى أعلى بقوة قدرها $\left(\frac{2}{5}\right)$ جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان الحبل واقعاً في المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل وكانت الزاوية بين الحبل وبين خط أكبر ميل قياسها 5° حيث $\tan 5^\circ = \frac{2}{4}$ احسب معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى وكذا قياس زاوية الاحتكاك.

الحل



∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى

∴ الاحتكاك يكون نهائياً وفي اتجاه لأسفل المستوى

وبتحليل كل من \vec{W} ، و \vec{F} في اتجاهين متعامدين

∴ معادلتا الاتزان هما : $\vec{W} \sin \theta = \vec{F} \cos \theta$ و $\vec{W} \cos \theta = \vec{F} \sin \theta + \vec{f}$

∴ $\vec{W} \sin \theta = \vec{F} \cos \theta$ و $\vec{W} \cos \theta = \vec{F} \sin \theta + \vec{f}$

∴ $\vec{W} \sin \theta = \vec{F} \cos \theta$ و $\vec{W} \cos \theta = \vec{F} \sin \theta + \vec{f}$

∴ $\vec{W} \sin \theta = \vec{F} \cos \theta$ و $\vec{W} \cos \theta = \vec{F} \sin \theta + \vec{f}$

وبالتعويض من (١) في (٢) : ∴ $\vec{W} \sin \theta = \vec{F} \cos \theta$ و $\vec{W} \cos \theta = \vec{F} \sin \theta + \vec{f}$

∴ معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\mu = \frac{1}{3}$

وبفرض أن قياس زاوية الاحتكاك $\theta = 18.46^\circ$

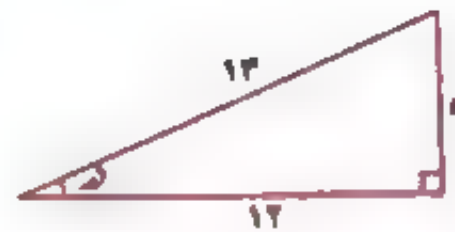
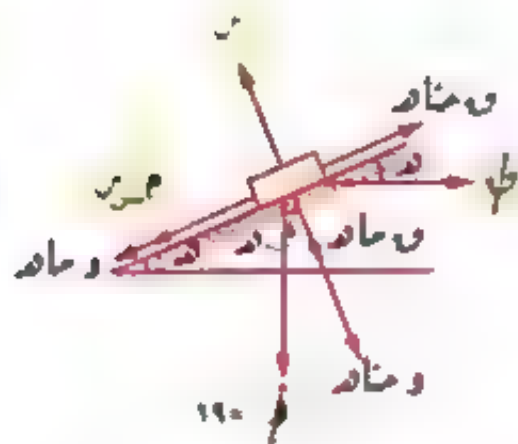
∴ $\mu = \frac{1}{3}$

∴ قياس زاوية الاحتكاك $\theta = 18.46^\circ$

مثال ٧

وضع جسم وزنه ١٩ ثقل كجم. على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{12}{13}$ شد الجسم بقوة أفقية واقعة في المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\frac{1}{3}$ فتوجد مقدار قوة الشد.

الحل



∴ الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى

الوحدة 1

∴ الاحتكاك نهائى ومقداره = μR ويعمل فى اتجاه المستوى إلى أسفل

وبتحليل القوتين Q و W فى اتجاهين متعامدين

∴ معادلتا الاتزان هما : $R = W \sin \theta$ و $Q = W \cos \theta$

$$(1) \quad \therefore \mu + \frac{228}{13} = R$$

$$\therefore R = \frac{12}{13} \times 19 + \frac{5}{13} \times 19$$

$$\therefore \frac{5}{13} \times 19 + R = \frac{12}{13} \times 19$$

$$Q \sin \theta = \mu R + Q \cos \theta$$

(2)

$$\therefore \frac{12}{13} = Q \left(\frac{1}{4} + \mu \right) + \frac{90}{13}$$

وبالتعويض من (1) فى (2) : $\therefore \frac{12}{13} = Q \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{13} + \frac{228}{13} \right) \right) + \frac{90}{13}$

$$\therefore \frac{12}{13} = Q \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{13} + \frac{114}{13} \right) + \frac{90}{13}$$

$$\therefore Q = 22 \text{ ثقل كجم}$$

$$\therefore 24 = Q + 5 + 228$$

∴ مقدار قوة الشد = 22 ثقل كجم.

حل آخر :

∴ الجسم متزن وعلى وشك الحركة تحت تأثير ثلاثة قوى

هى Q ، R ، و W

، بتطبيق قاعدة لامي :

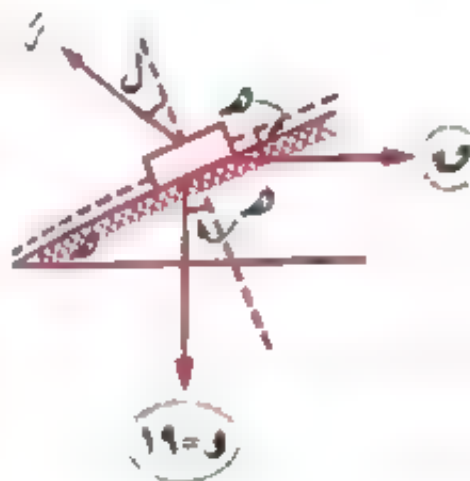
$$\therefore \frac{Q}{\sin \theta} = \frac{R}{\sin \phi} = \frac{W}{\sin \psi}$$

$$\therefore \frac{19}{\sin \theta} = \frac{Q}{\sin \phi} = \frac{W}{\sin \psi}$$

$$\therefore Q = \frac{19 \sin \phi}{\sin \theta} = \frac{19 \sin \phi}{\sin \psi}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{13} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{13} - 1$$

$$22 = \text{ثكجم}$$



$$\therefore \frac{(L + H) \sin \theta}{\sin \phi} \times 19 = Q$$

لاحظ أن :

يمكن إيجاد قيمة Q باستخدام الآلة الحاسبة كما يلى :

$$Q = 19 \times \frac{\sin \phi}{\sin \theta}$$

$$= 19 \times \frac{\sin \left(\frac{1}{4} \right)}{\sin \left(\frac{12}{13} \right)}$$

$$22 = \text{ثكجم}$$

مثال 8

جسمان وزناهما ومعامل الاحتكاك يصنعها المستوى بينهما مشدود م

الحل

الجسم ذو معام الجسمان معًا ، بالنسبة للجسم

∴ الجسم علم

$$\therefore \frac{1}{8} + \mu = R$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \mu = \frac{1}{8}$$

∴ بالنسبة للجسم

∴ الجسم علم

$$\therefore \frac{1}{4} = \mu$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \mu$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \mu$$

من (1) ، (2)

$$\therefore \frac{1}{4} = \mu$$

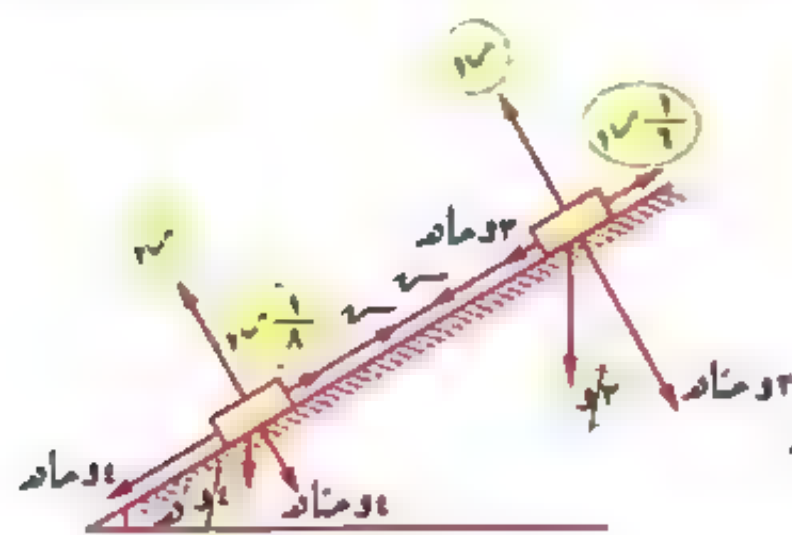
$$\therefore \frac{1}{4} = \mu$$

مثال ٨

جسمان وزناهما ٢ و ٤ و متصلان بخيط خفيف ينطبق على خط أكبر ميل لمستوي مائل خشبي ومعامل الاحتكاك السكوني بينهما والمستوي $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{8}$ على الترتيب فإذا كانت μ قياس الزاوية التي يصنعها المستوي مع الأفقي تزداد بالتدريج فأى الجسمين يوضع أسفل الآخر لكي يتحركا معاً والخيط بينهما مشدود مع ذكر السبب ثم أثبت أن : $\mu = \frac{1}{7}$ عندما يكون الجسمان على وشك الانزلاق.

الحل

الجسم ذو معامل الاحتكاك الأصغر يوضع أسفل الجسم ذو معامل الاحتكاك الأكبر حتى يتحرك الجسمان معاً والخيط مشدود بينهما



• بالنسبة للجسم الذي وزنه ٤ و :

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل

$$\therefore 4\sin\mu + T = 4\cos\mu \times \frac{1}{8} \quad , \quad 2\sin\mu = 4\cos\mu - T$$

$$\therefore 4\sin\mu - 4\cos\mu \times \frac{1}{8} = T$$

$$= 4\cos\mu - \frac{1}{2}\cos\mu$$

(١)

• بالنسبة للجسم الذي وزنه ٢ و :

∴ الجسم على وشك الحركة لأسفل :

$$\therefore 2\sin\mu + T = 2\cos\mu \times \frac{1}{4} \quad , \quad 2\sin\mu = \frac{1}{2}\cos\mu - T$$

$$\therefore 2\sin\mu - \frac{1}{2}\cos\mu = -T$$

$$= \frac{1}{2}\cos\mu - 2\sin\mu$$

(٢)

من (١) ، (٢) :

$$\therefore 4\cos\mu - \frac{1}{2}\cos\mu = 2\sin\mu - \frac{1}{2}\cos\mu + 2\sin\mu$$

$$\therefore 7\cos\mu = 4\sin\mu$$

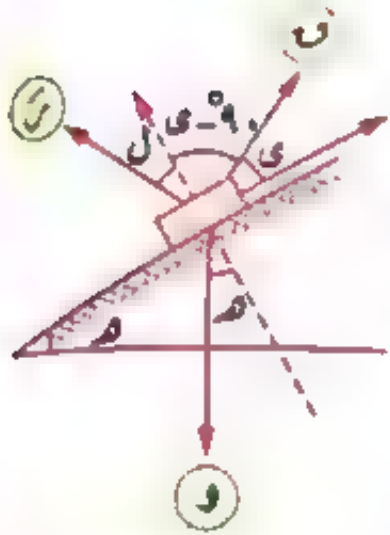
$$\therefore \mu = \arctan\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\therefore \mu = \arctan\left(\frac{7}{4}\right)$$

مثال ٩

وضع جسم وزنه (و) على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (هـ) فإذا كانت زاوية الاحتكاك قياسها (ل) فأوجد مقدار واتجاه أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى.

الحل



بفرض أن القوة \vec{P} تصنع مع المستوى زاوية قياسها γ

∴ الجسم على وشك الحركة

∴ الجسم متزن تحت تأثير ثلاث قوى هي \vec{P}

، \vec{R} (رد الفعل المحصل) ، و \vec{W}

∴ قياس الزاوية بين خطي عمل القوتين \vec{R} ، و $\vec{W} = 180^\circ - (ل + هـ)$

، قياس الزاوية بين خطي عمل القوتين \vec{P} ، و $\vec{W} = 90^\circ + (هـ + ل)$

، قياس الزاوية بين خطي عمل القوتين \vec{P} ، و $\vec{R} = 90^\circ - ل + هـ = 90^\circ - (ل - هـ)$

وباستخدام قاعدة لامى :

$$\frac{\vec{R}}{\sin(90^\circ - (ل - هـ))} = \frac{\vec{W}}{\sin(180^\circ - (ل + هـ))} = \frac{\vec{P}}{\sin(90^\circ + (هـ + ل))}$$

$$\frac{\vec{R}}{\sin(ل - هـ)} = \frac{\vec{W}}{\sin(ل + هـ)} = \frac{\vec{P}}{\cos(هـ + ل)}$$

$$\frac{\vec{P}}{\cos(هـ + ل)} = \frac{\vec{W}}{\sin(ل - هـ)}$$

ويكون مقدار \vec{P} أقل ما يمكن عندما $\sin(ل - هـ)$ أكبر ما يمكن

$$\text{أي : } \sin(ل - هـ) = 1$$

$$\therefore ل - هـ = 90^\circ$$

$$\therefore ل = هـ$$

∴ مقدار أقل قوة $\vec{P} = \vec{W} \sin(ل + هـ)$ وتصنع مع المستوى لأعلى زاوية قياسها $ل$



من أسئلة الكتاب المدرسي

على اتزان جسم على مستوي مائل خشن



١ وضع جسم على مستوي مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 60° وكان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{4}$ وضع مع ذكر السبب أن هذا الجسم لا يمكن أن يكون متزنًا.

٢ جسم وزنه ٢٨ ث. كجم يكون على وشك الحركة تحت تأثير وزنه إذا وضع على مستوي مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{1}{4}$ فإذا وضع هذا الجسم على مستوي أفقى فى نفس خشونة المستوى المائل وأثرت فيه قوة شد إلى أعلى تصنع مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ وتقع فى مستوى رأسى فجعلته على وشك الحركة. أوجد مقدار هذه القوة ومقدار رد الفعل العمودى.

١٠٠ ، ٣٢ ث. كجم.

٣ وضع جسم وزنه ٤ نيوتن على مستوي يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوى $\frac{\sqrt{3}}{4}$ أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها $\frac{1}{4}$ نيوتن فإذا كان الجسم متزنًا. فعين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا.

ج = ١.٥ نيوتن لأعلى ، يكون الجسم على وشك الحركة.

٤ وضع جسم مقدار وزنه ٢ نيوتن على مستوي يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° ومعامل الاحتكاك السكوني بينه وبين الجسم يساوى $\frac{2}{3}$ أثرت على الجسم قوة تعمل فى خط أكبر ميل للمستوى ولأعلى ومقدارها ٢ نيوتن. فإذا كان الجسم متزنًا ، عين قوة الاحتكاك وبين ما إذا كان الجسم على وشك الحركة أم لا.

ج = $\frac{1}{3}$ نيوتن لأسفل ، لا يكون الجسم على وشك الحركة.

٥ وضع جسم وزنه ٦٠ ثقل كجم على مستوي مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° شد الجسم لأعلى المستوى بقوة موازية لخط أكبر ميل جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{1}{\sqrt{3}}$ فأوجد مقدار قوة الشد.

٦٠٠ ثقل كجم.

٦ وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{3}{5}$ ، شد الجسم بقوة لأعلى المستوى وموازية لخط أكبر ميل فجعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى فإذا كان مقدار هذه القوة يساوى ١٣ نيوتن. فأوجد معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى. $\frac{1}{4}$

٧ يرتكز جسم وزنه ٢٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{3}{4}$ فإذا كانت أقل قوة تعمل فى اتجاه المستوى لأعلى لتحفظ توازن الجسم مقدارها يساوى ٨ ثقل كجم. فأوجد قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى. ١٤٢°

٨ جسم وزنه ٢٥ ث.كجم موضوع على مستوٍ مائل خشن يصنع مع الأفقى زاوية جيبها $\frac{3}{5}$ فإذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $= \frac{1}{5}$ فأوجد أقل قوة تؤثر فى اتجاه يوازى المستوى وتمنع الجسم من الانزلاق. ١١ ث.كجم.

٩ وضع جسم وزنه ١٥ نيوتن على مستوٍ يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{4}{5}$ وكان قياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ٤٥° بين أن الجسم يبقى متزنًا ثم أوجد مقدار القوة التى تؤثر فى الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أسفل وتجعل الجسم على وشك الحركة. ٢ نيوتن.

١٠ جسم وزنه ١٨ ث.كجم موضوع على مستوٍ مائل خشن لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٦٠° فإذا نقص قياس زاوية ميل المستوى إلى ٣٠° فأوجد مقدار قوة الاحتكاك ثم أوجد مقدار القوة التى تؤثر فى الجسم عندئذٍ فى اتجاه خط أكبر ميل فى المستوى وتجعله على وشك الانزلاق. ١٨ ، ٩ ث.كجم.

١١ وضع جسم مقدار وزنه ٣٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن. لوحظ أن الجسم يكون على وشك الانزلاق إذا كان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا زيد قياس زاوية ميل المستوى إلى ٦٠° فأوجد مقدار:

- ① أقل قوة تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى وتمنعه من الانزلاق.
 - ② القوة التى تؤثر فى الجسم موازية لخط أكبر ميل فى المستوى وتجعله على وشك الحركة إلى أعلى المستوى.
- ١٠٠ ، ٣٧ نيوتن ، ٢٠ ، ٣٧ نيوتن.

١٢ وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين المستوى $\frac{\sqrt{3}}{4}$ بين ما إذا كان الجسم ينزلق على المستوى أو يكون على وشك الانزلاق أو أن الاحتكاك غير نهائى ، ثم أوجد مقدار واتجاه قوة الاحتكاك عندئذٍ. وإذا أثرت على الجسم قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى. فأوجد مقدار واتجاه هذه القوة :

- ① ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى.
② ليكون الجسم على وشك الحركة إلى أسفل المستوى.

٢٠ ، ٥ ، ١ ث كجم.

١٣ وضع جسم وزنه ٦٥ نيوتن على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{9}{13}$ ومعامل الاحتكاك السكونى بينه وبين المستوى $\frac{1}{4}$ أثرت على الجسم قوة مقدارها ٩ نيوتن فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى بحيث ظل الجسم متزنًا. عيّن مقدار واتجاه قوة الاحتكاك وبين ما إذا كانت نهائية أم لا واذكر التغيير الذى يجب أن يحدث لمقدار القوة حتى يصبح الجسم على وشك الحركة إلى أسفل. ١٦٠ نيوتن لأعلى ، لا ، نقص مقدار ٥ إلى ٥ نيوتن.

١٤ وضع جسم وزنه ٦٠ ثقل كجم على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{4}$ شد الجسم لأعلى بقوة تصنع مع المستوى زاوية قياسها 30° فجعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى. أوجد مقدار هذه القوة.

٣٠٠ ثقل كجم.

١٥ وضع جسم وزنه ١٠ ث.كجم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° ، ربط الجسم فى حبل وشد الحبل لأعلى بقوة مقدارها $4\sqrt{3}$ ث.كجم فإذا علم أن الحبل واقع فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى وكان قياس الزاوية بين الحبل وبين خط أكبر ميل $= 30^\circ$ وكان الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى. فاحسب معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى.

$\frac{1}{4}$ ث.

١٦ وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوٍ يميل على الأفقى بزاوية ظلها $\frac{12}{13}$ ومعامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى $\frac{2}{3}$ أوجد مقدار القوة الأفقية التى تؤثر فى الجسم والواقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل والتى عندها يصبح الجسم على وشك الانزلاق.

٢٠٠ نيوتن.

١٧ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيبها $\frac{5}{13}$ شد الجسم بقوة أفقية مقدارها ٢٢ نيوتن واقعة فى المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل للمستوى جعلت الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى هو $\frac{1}{4}$ ، فأوجد مقدار وزن الجسم (و) ١٩٠ نيوتن.

١٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① وضع جسم وزنه ٦ نيوتن على مستوى مائل خشن فكان على وشك الانزلاق ، فإذا كانت قوة الاحتكاك النهائى $3\sqrt{2}$ نيوتن فإن قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى يساوى°

- (أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (ج) ٦٠ (د) ٩٠

② وضع جسم على مستوى خشن مائل وكانت زاوية احتكاك الجسم مع المستوى ل وكان المستوى يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ فإن الجسم يظل مترنأ إذا وفقط إذا كان

- (أ) $L < \mu$ (ب) $L \leq \mu$ (ج) $L \geq \mu$ (د) $L = \mu$

③ وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ وكان الجسم مترنأ على المستوى فإن

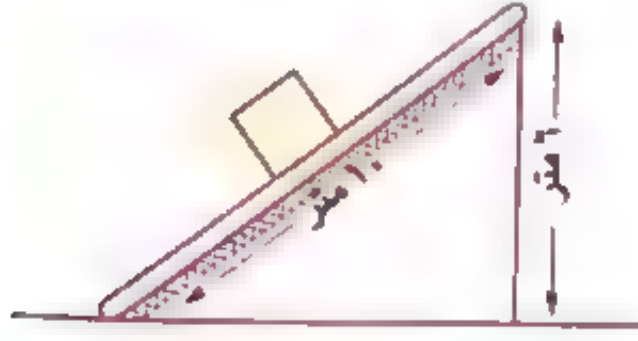
- (أ) $\theta = 30^\circ$ (ب) $\theta < 30^\circ$ (ج) $\theta \geq 30^\circ$ (د) $\theta \leq 30^\circ$

④ إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين جسم ومستوى مائل خشن يساوى $3\sqrt{2}$ فإن قياس زاوية ميل هذا المستوى على الأفقى عندما يكون الجسم على وشك الانزلاق بتأثير وزنه فقط =

- (أ) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 75°

⑤ إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ وكان على وشك الانزلاق تحت تأثير وزنه فقط فإن معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى يساوى

- (أ) $\frac{5}{13}$ (ب) $\frac{5}{12}$ (ج) $\frac{12}{13}$ (د) $\frac{12}{5}$



٦ في الشكل المقابل :

الجسم على وشك الانزلاق إلى أسفل

المستوى فيكون معامل

الاحتكاك السكوني =

(د) $\frac{4}{3}$

(ج) $\frac{3}{4}$

(ب) $\frac{4}{5}$

(أ) $\frac{3}{5}$

٧ إذا وضع جسم على مستوى خشن وكان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى

تساوى قياس زاوية الاحتكاك فإن الجسم

(أ) يستقر على المستوى. (ب) يتحرك على المستوى.

(ج) يكون على وشك الحركة أسفل المستوى.

(د) يكون على وشك الحركة أعلى المستوى.

٨ وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 60° وكان معامل

الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ فإن هذا الجسم

(أ) على وشك الحركة لأعلى المستوى. (ب) على وشك الحركة لأسفل المستوى.

(ج) يتحرك على المستوى. (د) يبقى ساكناً.

٩ وضع جسم كتلته ٤ كجم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30°

ومعامل الاحتكاك بينه وبين المستوى $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ فإن الجسم

(أ) يكون على وشك الحركة لأعلى المستوى.

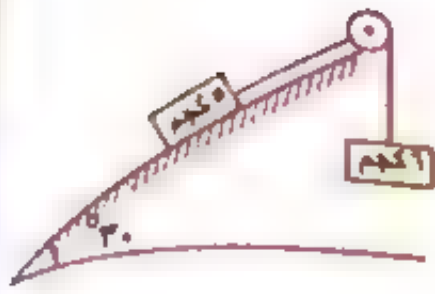
(ب) يكون على وشك الحركة لأسفل المستوى.

(ج) يتحرك على المستوى. (د) يبقى ساكناً.

١٠ وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق وعندما ازدادت زاوية ميل

المستوى على الأفقى تحرك الجسم لأسفل المستوى فإن قوة الاحتكاك عندئذٍ

(أ) انعدمت. (ب) نقصت. (ج) زادت. (د) أصبحت لا نهائية.



١١ في الشكل المقابل :

جسم كتلته ٥ كجم موضوع على مستوى مائل خشن ومتصل بخيط خفيف يمر على بكره ملساء عند حافة المستوى ويتدلى من الطرف الآخر للخيط جسم كتلته ٦ كجم إذا كانت المجموعة متزنة

فإن مقدار واتجاه قوة الاحتكاك تكون

(١) ٣,٥ ث.كجم. لأعلى المستوى.

(ب) ٣,٥ ث.كجم. لأسفل المستوى.

(ج) ٨,٥ ث.كجم. لأعلى المستوى.

(د) ٨,٥ ث.كجم. لأسفل المستوى.

١٢ وضع جسم على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٣٠° فانزلق مباشرة لأسفل المستوى فإن

(١) قياس زاوية الاحتكاك = ٣٠° (ب) معامل الاحتكاك السكونى $\mu_s > \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ج) معامل الاحتكاك الحركى $\mu_k < \frac{\sqrt{3}}{2}$

(د) وزن الجسم يساوى قوة الاحتكاك الحركى.

١٣ إذا وضع جسم على مستوى مائل خشن وكان على وشك الانزلاق فإن ظل زاوية الاحتكاك يساوى كلاً مما يأتى ما عدا

(١) معامل الاحتكاك.

(ب) النسبة بين مقدار رد الفعل العمودى ومقدار رد الفعل المحصل.

(ج) ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى.

(د) النسبة بين مقدار الاحتكاك النهائى ومقدار رد الفعل العمودى.

١٤ وضع جسم وزنه (و) نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها (٠) ومعامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى يساوى (م) فإن القوة المماسية التى تؤثر على الجسم وتجعل الاحتكاك منعدم تساوى

نيوتن.

(١) م و

(ب) م مّا ٠

(ج) م و مّا ٠

(د) و مّا ٠

١٩

مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها يساوى $\frac{5}{13}$ ، وضع عليه جسم مقدار وزنه ١٣٠ نيوتن وأثرت عليه قوة فى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى. فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{2}{5}$ فأوجد النهايتين اللتين ينحصر بينهما مقدار القوة التى تجعل الجسم فى حالة اتزان على المستوى.

١٤٠٠ ، ١٠٠ نيوتن

٢٠ وضع جسم وزنه ٥٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ فإذا كان أقل وأكبر قوة موازية لخط أكبر ميل وتجعل الجسم متزنًا على المستوى هما ١٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب. أوجد معامل الاحتكاك وقياس زاوية ميل المستوى على الأفقى.

٢١ ، $\frac{3}{5}$ ، ٣٠ ، $\frac{3}{5}$

٢١ جسم موضوع على مستوٍ مائل على الأفقى بزاوية قياسها 30° تؤثر فيه قوة موازية للمستوى وفى اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى وقد وجد أنه إذا كان مقدار $\mu = 1$ ث.كجم كان الجسم على وشك الحركة إلى أسفل وإذا كان مقدار $\mu = 3$ ث.كجم كان الجسم على وشك الحركة إلى أعلى. أوجد وزن الجسم ومعامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى.

٢٢ ٤ ث.كجم ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{3}{4}$

٢٢ وضع جسم وزنه ١٥٠ ث.كجم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° ثم ربط بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى. فإذا كان مقدار أقل ثقل يمكن تعليقه فى الطرف الآخر للخيط هو $25\sqrt{2}$ ث.كجم ومقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه هو $125\sqrt{2}$ ث.كجم دون أن يختل التوازن. فأوجد μ وكذا معامل الاحتكاك السكونى.

٢٣ 45° ، $\frac{2}{3}$

٢٣ وضع جسم وزنه ٥٠٠ ث.كجم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° حيث $\mu = \frac{1}{3}$ ثم ربط الجسم بخيط يمر على بكرة ملساء عند قمة المستوى ويتدلى من طرفه كفة ميزان كتلتها ٢٥ جم فإذا كان أقل ثقل يلزم وضعه فى الكفة حتى يظل الجسم متزنًا هو ١٧٥ جم. فأوجد معامل الاحتكاك السكونى ثم أثبت أن أكبر ثقل يمكن وضعه فى الكفة دون أن يختل التوازن هو ٥٧٥ جم.

٢٤ $\frac{2}{3}$

٢٤ وضع جسم وزنه ٢٠ نيوتن على مستوٍ مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظلها يساوى $\frac{4}{3}$ فإذا كان μ هو مقدار أقل قوة موازية لخط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى وتمنع الجسم من الانزلاق لأسفل ، μ هو مقدار أقل قوة أفقية تمنعه أيضًا من الانزلاق لأسفل وكان $\mu = \frac{1}{2}$ فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى ومقدار أى من القوتين.

٢٥ $\frac{1}{2}$ ، ١٠ نيوتن

٢٥ وضع جسم وزنه ٣ ث.كجم على مستوٍ خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° فوجد أنه على وشك الانزلاق. فإذا أدير المستوى إلى أن أصبح ميله على الأفقى 60° فأوجد مقدار القوة التى تعمل فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك

الحركة إلى أسفل. وإذا استعضنا عن هذه القوة بقوة أخرى أفقية. فثبت أن مقدارها يساوي مقدار القوة الأولى.

٢٦. ٣٢. ث كجم.

وضع جسم وزنه ٨ ث كجم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° لوحظ أن مقدار أقل قوة أفقية تؤثر على الجسم وتجعله فى حالة توازن هى ٤ ث كجم.

٢٧. $\frac{1}{4}$ ، ١٦ ث كجم.

أوجد : (١) معامل الاحتكاك السكونى.

(٢) أكبر مقدار لهذه القوة.

وضع جسم وزنه ٨ ث كجم على مستوى أفقى خشن ثم أميل المستوى بالتدريج فأصبح على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميل المستوى 30° أوجد مقدار أكبر قوة تؤثر فى الجسم لحفظ التوازن :

(١) إذا كانت القوة أفقية.

٢٨. ٢٤. ث كجم ، ١٢ ث كجم.

(٢) إذا كانت القوة تميل على الأفقى بزاوية قياسها 60° .

وضع جسم وزنه ٢ ثقل كجم على مستوى أفقى خشن ثم أميل المستوى تدريجياً حتى أصبح الجسم على وشك الانزلاق أسفل المستوى عندما كان قياس زاوية ميل المستوى على الأفقى 30° أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الجسم والمستوى. وإذا ربط الجسم عندئذ بخيط ثم شد الخيط فى اتجاه يميل بزاوية قياسها 60° على الأفقى حتى أصبح الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى. فأوجد :

(١) مقدار قوة الشد. (٢) مقدار قوة الاحتكاك. $\frac{1}{3}$ ، ٣٢ ثقل كجم ، $\frac{1}{4}$ ثقل كجم.

٢٩. اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

(١) وضع جسم وزنه ٤ ث كجم على مستوى خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° ومعامل الاحتكاك السكونى بينهما $\mu = \frac{1}{4}$ فإن مقدار أكبر قوة تحفظ توازن الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى هى ث كجم.

(أ) ٣٢ (ب) ٢٢ (ج) ٢٢ (د) $\frac{1}{3}$

(٢) إذا وضع جسم وزنه (و) على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ وأثرت عليه قوة مقدارها (و) فى اتجاه خط أكبر ميل لأعلى مستوى وأصبح الجسم على وشك الحركة لأعلى فإن : $\mu + \tan \theta = \dots\dots\dots$

(أ) $\tan \theta$ (ب) $\cot \theta$ (ج) $\tan \theta$ (د) $\cot \theta$

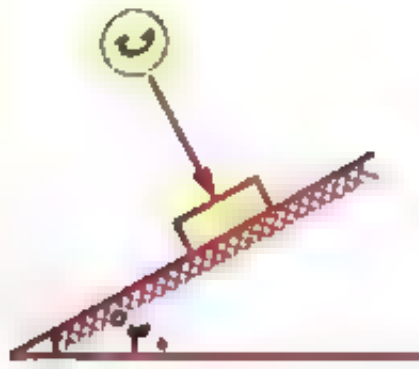
٣ وضع جسم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة μ في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى فإذا علم أن الجسم يكون على وشك الحركة إلى أعلى المستوى عندما $\mu = ٢٠$ نيوتن ويكون على وشك الحركة إلى أسفل عندما $\mu = ٢٠$ نيوتن فإن معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى =

- (١) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ (ج) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{1}{3}$

٤ جسم وزنه (و) ثجم إذا وضع على مستوى أفقى خشن واثرت عليه قوة أفقية مقدارها ١٠٠ ثجم لأصبح على وشك الحركة وإذا أميل المستوى بزاوية قياسها ٤٥° على الأفقى واثرت على الجسم قوة مقدارها $١٥٠ \sqrt{3}$ ثجم لأعلى المستوى لجعلت الجسم على وشك الانزلاق فإن معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى =

- (١) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

٥ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ١٢ ثجم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\frac{\sqrt{3}}{9}$ فإن أقل قوة عمودية على المستوى وتحفظ الجسم في حالة اتزان = ثجم.

- (١) $\sqrt{3} ٤$ (ب) $\sqrt{3} ٩$ (ج) $\sqrt{3} ١٢$ (د) $\sqrt{3} ١٨$

٣٠ يجر حصان حجرًا بحبل صاعدًا على طريق يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ بينما يميل الحبل على الطريق بزاوية قياسها ϕ فإذا علم أن قياس زاوية الاحتكاك بين الطريق والحجر تساوى θ وأن الحصان يوشك أن يحرك الحجر فثبت أن مقدار الشد في الحبل يكون أصغر ما يمكن عندما $\phi = \theta$ ، احسب هذا المقدار عندما كتلة الحجر = ١٠٠٠ كجم ، $\theta + \phi = 30^\circ$ ، $\theta = ٥٠^\circ$ ثجم.

٣١ وضع جسم مقدار وزنه (و) نيوتن على مستوي خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ وزاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل حيث $\theta < \alpha$ فإذا كان مقدار أقل قوة أفقية تكفى لمنع الجسم من الانزلاق تساوى $(\frac{1}{\mu} \text{ و } \frac{1}{\mu})$ نيوتن ومقدار القوة الأفقية التى تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى المستوى تساوى (٢ و) نيوتن.
٤٥٠ ، ١٨٢٦٦

٣٢ كتلتان ٣ ، ٥ كجم متصلان بخيط خفيف وموضوعتان على مستوى مائل خشن وكان معامل الاحتكاك السكونى بين المستوى والجسمين $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$ على الترتيب. بين أى الجسمين يوضع أسفل الجسم الآخر حتى يتحرك الجسمان معاً ، ثم أثبت أن ظل زاوية ميل المستوى على الأفقى عندما يكون الجسمان على وشك الحركة $\frac{2}{3}$

٣٣ جسمان وزناهما ٢ و ٣ و متصلان بخيط خفيف ينطبق على خط أكبر ميل لمستوي مائل خشن ومعامل الاحتكاك السكونى بينهما والمستوى $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ على الترتيب فإذا كانت θ قياس الزاوية التى يصنعها المستوى مع الأفقى تزداد بالتدريج فأى الجسمين يوضع أسفل الآخر لكى يتحركا معاً والخيط بينهما مشدود مع ذكر السبب ثم أثبت أن : $\theta = \frac{1}{6}$ عندما يكون الجسمان على وشك الانزلاق.

٣٤ وضع جسم مقدار وزنه و على مستوي خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ فوجد أنه على وشك الانزلاق. أثبت أن القوة التى توازى خط أكبر ميل للمستوى وتجعل الجسم على وشك الحركة لأعلى المستوى تساوى ٢ و ما θ أثبت أيضاً أن مقدار رد الفعل المحصل يساوى و

٣٥ وضع جسم مقدار وزنه (و) نيوتن على مستوي مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ، وقياس زاوية الاحتكاك بين الجسم والمستوى ل حيث $\theta < \alpha$ وأثرت قوة (و) على الجسم فى اتجاه خط أكبر ميل للمستوى إلى أعلى. أثبت أن قيم و التى تجعل الجسم متزنًا تحقق المتباينة : $\frac{(L - \theta)}{\mu} \geq \frac{(L + \theta)}{\mu}$ وإذا كانت : $\frac{(L - \theta)}{\mu} = \frac{(L + \theta)}{\mu}$ ، $\theta = (L - \theta) = 2 = 60^\circ$ أوجد الفترة التى تنتمى إليها و
١٠ [٢ ، ٦]



٣٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ وضع جسمان من مادتين مختلفتين وزنيهما W_1 ، W_2 على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ ومعامل الاحتكاك بين المستوي والجسمين هما μ_1 ، μ_2 على الترتيب فإذا كان الجسمان على وشك الحركة فإن :

$$(1) W_1 = W_2 \quad (ب) \mu_1 = \mu_2$$

$$(ج) W_1 \mu_1 = W_2 \mu_2 \quad (د) W_1 \sin \theta = W_2 \sin \theta$$

٢ جسم وزنه ٨ ث. كجم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أثرت عليه قوة F في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى فإن :

أولاً : F بالثقل كيلو جرام التي تجعل الجسم على وشك الحركة \Rightarrow

$$(1) \{2\} \quad (ب) \{6\} \quad (ج) \{2, 6\} \quad (د) [2, 6]$$

ثانياً : F بالثقل كيلو جرام التي تجعل الجسم متزن \Rightarrow

$$(1) \{2\} \quad (ب) \{6\} \quad (ج) \{2, 6\} \quad (د) [2, 6]$$

٣ جسم وزنه ١٢ نيوتن موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° وكان معامل الاحتكاك بين الجسم والمستوى $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ أثرت عليه قوة F في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى فجعلته على وشك الحركة فأى مما يأتى يكون صحيحاً لتحديد مقدار واتجاه F ؟

(I) ١٢ نيوتن لأعلى. (II) ١٢ نيوتن لأسفل. (III) ٢٤ نيوتن لأعلى.

(1) فقط II (ب) فقط III (ج) I ، II (د) II ، III

٤ إذا وضع جسم وزنه W على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ وكانت W_1 ، W_2 هما أكبر وأقل قوة في اتجاه خط أكبر ميل للمستوى لأعلى وتحافظان على توازن الجسم وكانت μ هي قوة الاحتكاك السكونى النهائى فإن :

$$\text{أولاً : } W_1 + W_2 = \dots\dots\dots$$

$$(1) 2W \text{ و } W \quad (ب) W \text{ و } W \quad (ج) 2W \text{ و } W \quad (د) 2W \text{ و } W$$

ثانيًا: $u - v = \dots\dots\dots$

(ب) و ما هـ + ع س

(١) و ما هـ

(د) و ما هـ - ع س

(ج) ٢ ع س

⑤ وضع جسم مقدار وزنه ٥٠ نيوتن على مستوى مائل خشن تؤثر عليه قوة u في اتجاه خط أكبر ميل إلى أعلى المستوى إذا علم أن قيمة u بالنيوتن التي تجعل الجسم في حالة اتزان تنتمي للفترة $[٢٠, ٢٠]$ فإن معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى = $\dots\dots\dots$

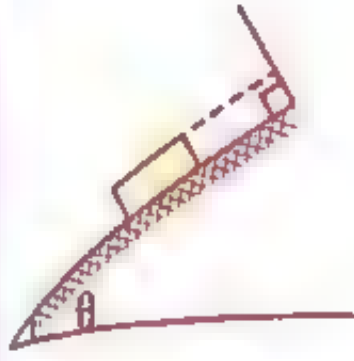
(د) $\frac{1}{3}$

(ج) $\frac{15}{37}$

(ب) $\frac{1}{4}$

(١) $\frac{37}{15}$

⑥ في الشكل المقابل :



جسم وزنه ٥ ث.كجم موضوع على مستوى مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية قياسها θ حيث ما $\theta = \frac{3}{5}$ مربوط بأحد طرفي خيط خفيف غير مرن والطرف الآخر للخيط مثبت في

حاجز عمودي على المستوى بحيث كان الحبل يوازي خط أكبر ميل للمستوى فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوى المائل هو ٠,٨ فإن الشد في الحبل = $\dots\dots\dots$ ث.كجم.

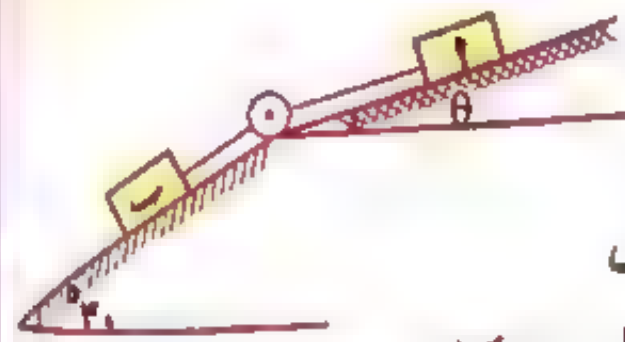
(د) ٤

(ج) ٣,٢

(ب) ٢

(١) صفر

⑦ في الشكل المقابل :



مستويان مائلان الأول أملس ويميل على الأفقى بزاوية قياسها 30° والثاني خشن ويميل على الأفقى بزاوية قياسها θ حيث ما $\theta = \frac{3}{5}$ وضع جسمان ١، ٢ كتلتيهما ٣٠ كجم ، ١٠ كجم على المستويين الخشن والأملس على الترتيب ويتصل الجسمان بخيط خفيف غير مرن يمر على بكرة ملساء عند نقطة تلاقي المستويين فإذا كانت

المجموعة على وشك الحركة فإن معامل الاحتكاك بين الجسم ١ والمستوى = $\dots\dots\dots$

(١) $\frac{1}{37}$

(ب) $\frac{2}{4}$

(ج) ١

(د) $\frac{23}{24}$

٣٧ مستويان مائلان متساويا خشونة ارتفاعهما مشترك ويساوي ٦٠ سم وطول أحد المستويين ٧٥ سم وطول الآخر ١٠٠ سم وضع جسمان متساويا الكتلة كل منهما على مستوى ويتصل الجسمان بخيط يمر على بكرة ملساء مثبتة عند قمة المستويين فإذا كانت المجموعة على وشك الحركة، فأوجد معامل الاحتكاك السكوني.

٣٨ سطح أفقي خشن على شكل مربع ٢×٢ حـ وفيه م نقطة تقاطع قطريه. وضع جسم وزنه ٢ ث.كجم عند م وأثرت عليه قوتان كل منهما تساوي ٥ ث.كجم في اتجاه $\vec{م ب}$ ، $\vec{م ح}$. أوجد قوة الاحتكاك. وإذا دار السطح حول $\vec{ح ب}$ بزاوية قياسها ٣٠° لأعلى فأصبح الجسم على وشك الحركة. أوجد معامل الاحتكاك السكوني.

٢٢٥ ث.كجم ، $\frac{٢٧ + ٦٢٥}{٣}$

٣٩ وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوي مائل خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ ومعامل الاحتكاك السكوني بين الجسم والمستوي يساوي مـ فإذا كانت و هي أقل قوة تكفي لجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى وكانت و هي أقل قوة موازية للمستوي تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى ، فأثبت أن : $و = ١٢ + ٢م$

٤٠ وضع جسم مقدار وزنه (و) على مستوي خشن يميل على الأفقي بزاوية قياسها هـ فإذا كانت زاوية الاحتكاك قياسها ل

- ١) أوجد اتجاه ومقدار أقل قوة تجعل الجسم على وشك الحركة إلى أعلى.
 - ٢) إذا كانت $هـ < ل$ فأوجد مقدار واتجاه أقل قوة واقعة في المستوى الرأسى المار بخط أكبر ميل تكفي لمنع انزلاق الجسم إلى أسفل.
- و ما (هـ + ل) ، و ما (هـ - ل).

٤١ جسمان وزناهما و ، ٢ و مرتكزان على مستوى مائل خشن ومتصلان بخيط يمر على بكرة ملساء مثبتة في المستوى نفسه. فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين كل من الجسمين والمستوي يساوي $\frac{١}{٣}$ فأوجد أكبر قيمة لزاوية ميل المستوى بحيث يظل الجسمان في حالة توازن علماً بأن كلا من فرعى الخيط يكونا في اتجاه خط أكبر ميل في المستوى المائل.

١٥٠°



الدرس الأول

عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة
في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد.

الدرس الثاني

عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة
لنقطة في نظام إحداثي
ثلاثي الأبعاد.

@reachforthetop



يمكنك حل
الامتحانات التفاعلية
على الدروس
من خلال مسح QR code
الخاص بكل امتحان

عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد

1

أنواع الحركة

إن تأثير القوة على النقط المادية يختلف عن تأثيرها على الأجسام المتماسكة ونوضح ذلك كما يلي :

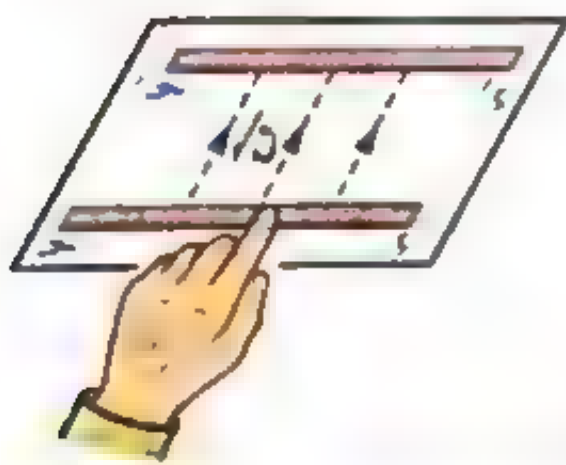


• إذا أثرت قوة \vec{F} على نقطة مادية (أو جسيم) فإنها تنتقل من موضعها وليكن ١ إلى موضع آخر وليكن ٢ في اتجاه القوة \vec{F} ويسمى هذا النوع من الحركة بالحركة الانتقالية.

• إذا أثرت قوة \vec{F} على جسم متماسك فإن حركة الجسم تكون إحدى ثلاثة أنواع من الحركة :

١) الحركة الانتقالية :

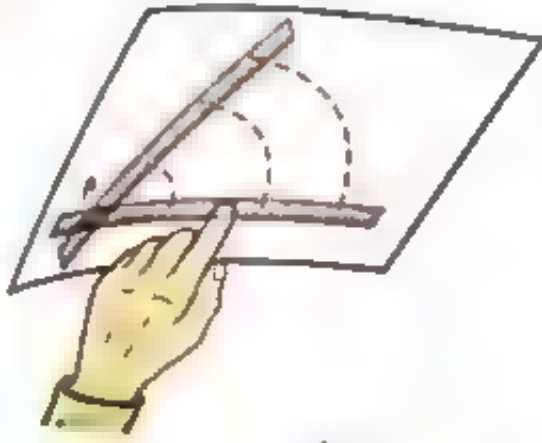
وفيها تتحرك جميع أجزاء الجسم مسافات متساوية في اتجاه \vec{v}



فمثلاً : عند دفع مسطرة موضوعة على نضد أفقي من نقطة منتصفها فإن المسطرة تنتقل من موضعها \vec{r}_1 مثلاً إلى موضع آخر \vec{r}_2 بحيث $\vec{r}_2 // \vec{r}_1$

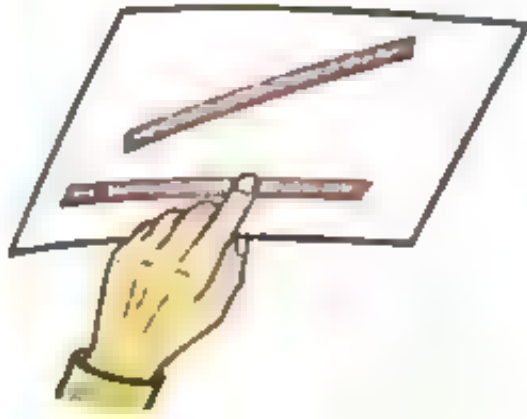
٢) الحركة الدورانية :

وفيها تتحرك جميع أجزاء الجسم على أقواس دائرية لها نفس المركز.



فمثلاً : عند دفع مسطرة موضوعة على نضد أفقى من أحد طرفيها بعد تثبيتها من الطرف الآخر فإنها تدور حول نقطة التثبيت أى تتحرك جميع أجزائها على أقواس دائرية مركزها نقطة التثبيت.

وهناك العديد من الأمثلة على الأجسام التى تتحرك حركة دورانية فى حياتنا مثل حركة الأبواب والشبابيك وعقارب الساعة.



٣ الحركة التى تجمع بين الحركة الانتقالية والدورانية :

ويتضح لنا عند دفع مسطرة موضوعة على نضد أفقى من نقطة تبعد عن منتصفها دون تثبيت أحد طرفيها فنجد أن حركتها تكون مزيجاً من الحركتين الانتقالية والدورانية.

عزم قوة بالنسبة لنقطة

هو كمية متجهة تحدد لنا مقدرة القوة على إحداث دوران للجسم حول نقطة أو محور وتتوقف على عاملين :

- ١ معيار (أى مقدار) القوة.
 - ٢ بُعد خط عملها عن مركز أو محور الدوران.
- فمثلاً :**

• فى الشكل المقابل :



عند محاولة فتح أو غلق الباب من نقطة تقترب من خط المفصلات (محور الدوران) فإننا نجد صعوبة فى ذلك أى أننا نحتاج قوة كبيرة لذلك بينما لا نحتاج سوى لقوة صغيرة لدوران الباب كلما ابتعدنا عن خط المفصلات (محور الدوران).

• فى الشكل المقابل :



عند محاولة ربط (صامولة) باستخدام (مفتاح إنجليزى) فإننا نجد صعوبة فى ذلك إذا كان ذراع المفتاح قصيراً بينما لا نحتاج سوى لقوة صغيرة لدوران (الصامولة) كلما كان ذراع المفتاح طويلاً.

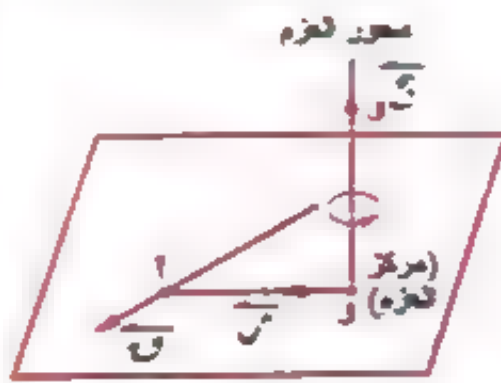


• في اشكر امقابل :

لكي يحافظ الأب وابنه على اتزان الأرجوحة لابد أن يكون الأب (الاثقل وزناً) أكثر قرباً من مركز الدوران من ابنه (الأخف وزناً) ثم بعد ذلك يمكن للأب أن يبتعد أكثر من

مركز الدوران فيعمل على دوران الأرجوحة حيث يرتفع الابن لأعلى أو يقترب أكثر من مركز الدوران فيعمل على دوران الأرجوحة حيث ينخفض الابن لأسفل.

تعريف



يعرف متجه عزم القوة \vec{M} بالنسبة للنقطة (O) ويرمز له بالرمز \vec{M}_O على أنه الكمية المتجهة $\vec{r} \times \vec{F}$

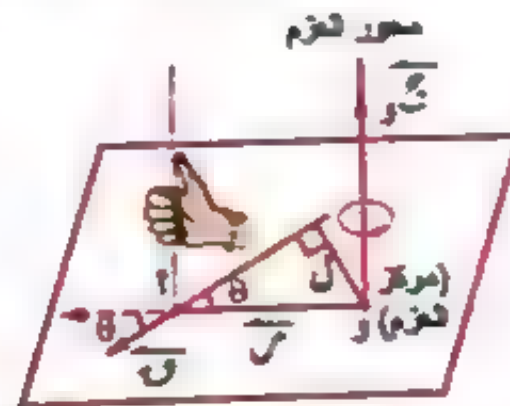
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

حيث \vec{r} هو متجه الموضع لأي نقطة A على خط عمل القوة \vec{F} بالنسبة للنقطة (O)

وتسمى النقطة (O) مركز العزم ويسمى المستقيم المار بالنقطة (O) عمودياً على المستوى الذي يحتوي القوة \vec{F} والنقطة (O) بمحور العزم.

• اتجاه متجه العزم :

إذا كانت θ الزاوية الصغرى بين \vec{r} ، \vec{F} عند رسمهما خارجين من نفس النقطة أو داخلين إلى نفس النقطة يكون متجه العزم \vec{M} عمودياً على المستوى الذي يجمع \vec{r} ، \vec{F} ويتحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمنى عند دوران المتجه \vec{r} نحو \vec{F} عبر الزاوية θ كالتالي :



، من تعريف الضرب الاتجاهي يكون ، $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}(\theta)$

حيث $r = |\vec{r}|$ ، $F = |\vec{F}|$

ي متجه وحدة عمودي على المستوى الذي يحوي \vec{r} ، \vec{r} في اتجاه متجه العزم \vec{M}

* معيار متجه العزم $\|\vec{M}\| = \|\vec{r} \times \vec{v}\| = r v \sin \theta$
 $\therefore \|\vec{M}\| = r v \sin \theta$ حيث $r = \|\vec{r}\|$ ، $v = \|\vec{v}\|$
 * وإذا كان L هو طول العمود الساقط من O على خط عمل \vec{v} فإن : $L = r \sin \theta$
 $\therefore \|\vec{M}\| = v (r \sin \theta) = v L$ أي أن : $\vec{M} = L \vec{v}$

ملاحظتان

① : معيار عزم \vec{v} بالنسبة إلى O $= v \times L$

\therefore وحدة معيار العزم = وحدة معيار القوة \times وحدة الطول

مثال : نيوتن. متر ، دايين. سم ،

$$L = \frac{\|\vec{M}\|}{v} \quad ②$$

أي أن : طول العمود الساقط من O على خط عمل \vec{v} = $\frac{\text{معيار متجه العزم } \vec{M}}{\text{معيار القوة } v}$

ملاحظة

عزم قوة بالنسبة لنقطة ثابت لا يتوقف على موضع نقطة تأثير القوة على خط عمل \vec{v}

الإثبات : بفرض أن A ، B نقطتان على خط عمل القوة \vec{v} ، \vec{r} هو متجه موضع النقطة A بالنسبة إلى النقطة O ، \vec{r}' هو متجه موضع النقطة B بالنسبة إلى النقطة O

$$\therefore \vec{r} = \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} = \vec{r}' + \vec{AB}$$

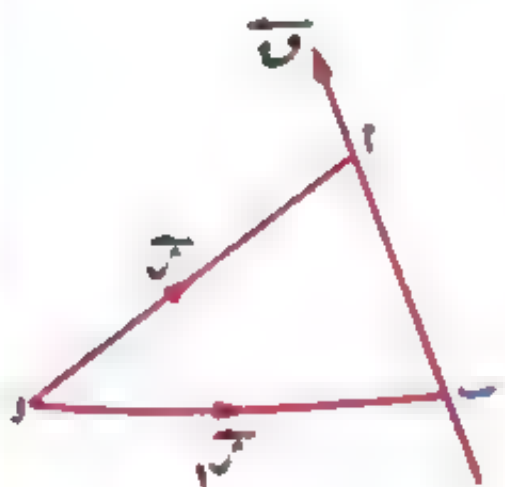
$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = (\vec{r}' + \vec{AB}) \times \vec{v} = \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{AB} \times \vec{v}$$

$$= \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{AB} \times \vec{v} \quad (\text{خاصية التوزيع})$$

(لأن \vec{AB} يوازي \vec{v})

$$= \vec{r}' \times \vec{v} + \vec{0} = \vec{r}' \times \vec{v}$$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = \vec{r}' \times \vec{v} = \vec{M}$$



(وهو المطلوب)

القياس الجبري لمتجه العزم

إذا حددنا متجه وحدة ثابت \vec{m} عمودي على المستوى الذي تعينه خط عمل \vec{F} والنقطة «و» فإنه يمكن التعبير عن متجه العزم \vec{M} منسوباً لمتجه \vec{m} كالآتي :

$\vec{M} = \vec{M} \cdot \vec{m}$ حيث \vec{M} يسمى القياس الجبري لمتجه العزم \vec{M} ويكون

$$(1) \quad \vec{M} = M \cdot \vec{m} \quad \text{«موجب»} \quad \text{أي أن: } \vec{M} = M(\vec{m})$$

إذا كان : \vec{M} في اتجاه \vec{m}



• القوة \vec{F} تعمل على الدوران حول «و» في اتجاه ضد اتجاه حركة عقارب الساعة



$$(2) \quad \vec{M} = -M \cdot \vec{m} \quad \text{«سالب»} \quad \text{أي أن: } \vec{M} = -M(\vec{m})$$

إذا كان : \vec{M} في عكس اتجاه \vec{m}

• القوة \vec{F} تعمل على الدوران حول «و» في اتجاه مع اتجاه حركة عقارب الساعة

$$(3) \quad \vec{M} = 0 \quad \text{«صفر»} \quad \text{أي أن: } \vec{M} = 0$$

إذا كان خط عمل \vec{F} يمر بالنقطة «و»

ملاحظات

(1) يطلق اسم «ذراع العزم» على طول العمود (ل) الساقط من النقطة و على خط عمل القوة \vec{F}

(2) القياس الجبري لعزم القوة الواحدة قد يكون موجباً حول نقطة وسالباً حول نقطة أخرى وصفرًا حول نقطة ثالثة.



في الشكل المقابل : \vec{M} (موجب) ، \vec{M} (سالب) ، $\vec{M} = 0$ صفر

(3) لاحظ الفرق بين : \vec{M} ، \vec{M} ، $\|\vec{M}\|$

• \vec{M} : متجه العزم حيث

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}(\vec{r}) &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{M}(-\vec{r}) &= -\vec{r} \times \vec{F} \end{aligned} \right\} \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

إذا كان الدوران في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

إذا كان الدوران في نفس اتجاه دوران عقارب الساعة

• \vec{r} : القياس الجبري لمتجه العزم حيث $\vec{r} = \vec{u} \times \vec{L}$ أو $\vec{r} = \vec{L} \times \vec{u}$ أو صفر كما ذكرنا سابقاً !

• $\|\vec{r}\|$: معيار متجه العزم وهو كمية موجبة دائماً

حيث $\|\vec{r}\| = \|\vec{r}\|$ أو $\|\vec{r}\| = \|\vec{r}\|$ أو $\|\vec{r}\| = \|\vec{r}\|$

(4) إذا كانت $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ مجموعة يمينية من متجهات الوحدة ، «و» نقطة

الأصل وإذا أثرت قوة $\vec{F} = F_1 \vec{u} + F_2 \vec{v} + F_3 \vec{w}$ عند النقطة ح (أ ، ب ، ج)

فإن : $\vec{r} = \vec{u} \times \vec{w}$

$$(\vec{r} = \vec{u} \times \vec{w}) \times (\vec{F} = F_1 \vec{u} + F_2 \vec{v} + F_3 \vec{w}) =$$

$$= F_1 (\vec{u} \times \vec{u}) + F_2 (\vec{u} \times \vec{v}) + F_3 (\vec{u} \times \vec{w}) =$$

ويكون : $\vec{r} = (\text{القياس الجبري لعزم } \vec{F} \text{ حول } O) = F_2 \vec{u} \times \vec{v} + F_3 \vec{u} \times \vec{w}$

فمثلاً : إذا كانت : $\vec{F} = 2\vec{u} - 4\vec{v} + 3\vec{w}$ تؤثر في أ (2 ، 2 ، 2)

فإن : $\vec{r} = \vec{u} \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) \times (\vec{F} = 2\vec{u} - 4\vec{v} + 3\vec{w}) =$

$$= 2(\vec{u} \times \vec{u}) - 4(\vec{u} \times \vec{v}) + 3(\vec{u} \times \vec{w}) =$$

∴ $\vec{r} = (\text{القياس الجبري لعزم } \vec{F} \text{ حول } O) = -4\vec{v} + 3\vec{w}$

مبدأ العزوم (نظرية فارينون)

عزم القوة \vec{F} بالنسبة لنقطة يساوي مجموع عزوم مركبات هذه القوة بالنسبة لنفس النقطة.

بفرض القوة $\vec{F} = F_1 \vec{u} + F_2 \vec{v} + F_3 \vec{w}$ تؤثر في نقطة أ

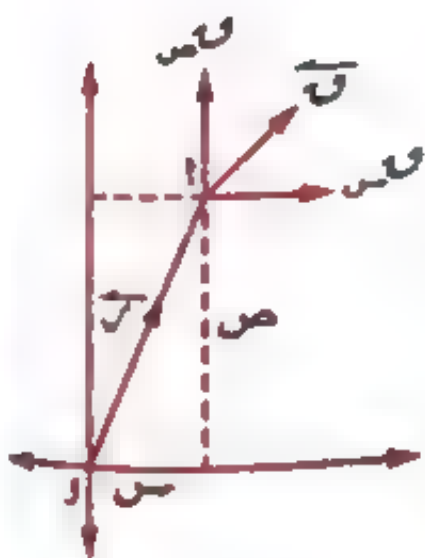
متجه موضعها بالنسبة للنقطة و هو $\vec{r} = (س ، ص ، ج)$ فإن :

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (F_1 \vec{u} + F_2 \vec{v} + F_3 \vec{w}) =$$

$$= F_1 (\vec{r} \times \vec{u}) + F_2 (\vec{r} \times \vec{v}) + F_3 (\vec{r} \times \vec{w}) =$$

$$= F_1 (\vec{r} \times \vec{u}) + F_2 (\vec{r} \times \vec{v}) + F_3 (\vec{r} \times \vec{w}) =$$

$$= \text{عزم } \vec{F} \text{ حول } O + \text{عزم } \vec{F} \text{ حول } O + \text{عزم } \vec{F} \text{ حول } O$$



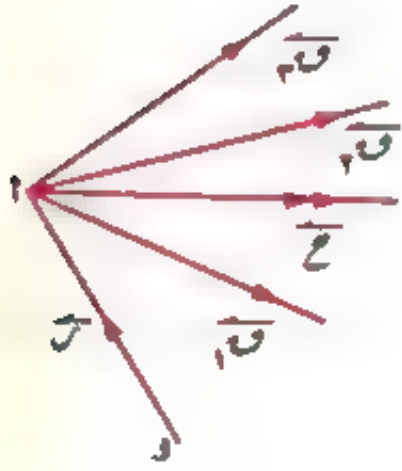
القوى المستوية

القوى المستوية هي القوى التي خطوط عملها تقع جميعاً في مستوى واحد وبالتالي فإن متجهات عزوم هذه القوى تكون متوازية وفي اتجاه عمودي على مستوى هذه القوى.

نظرية العزوم

مجموع عزوم عدة قوى مستوية متلاقية في نقطة بالنسبة لأية نقطة في الفراغ يساوي عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

البرهان:



نفرض أن $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \vec{Q}_4, \vec{Q}_5, \vec{Q}_6, \vec{Q}_7, \vec{Q}_8$ مجموعة من القوى

وأن خطوط عملها تتلاقى جميعاً في نقطة O

وأن (O) أية نقطة أخرى في الفراغ

$\therefore \vec{R} = \vec{Q}_1$ هو متجه موضع للنقطة O بالنسبة إلى (O) لجميع القوى

$$\therefore \vec{R} \times \vec{Q}_1 + \vec{R} \times \vec{Q}_2 + \vec{R} \times \vec{Q}_3 + \vec{R} \times \vec{Q}_4 + \vec{R} \times \vec{Q}_5 + \vec{R} \times \vec{Q}_6 + \vec{R} \times \vec{Q}_7 + \vec{R} \times \vec{Q}_8 = \vec{R} \times \vec{R}$$

$$= (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \vec{Q}_4 + \vec{Q}_5 + \vec{Q}_6 + \vec{Q}_7 + \vec{Q}_8) \times \vec{R} \quad (\text{خاصية التوزيع})$$

$$= \vec{R} \times \vec{R} \quad \text{حيث } \vec{R} \text{ متجه المحصلة لمجموعة القوى}$$

، \therefore خط عمل المحصلة يمر بالنقطة O أيضاً

$\therefore \vec{R} \times \vec{R} = 0$ هو عزم المحصلة بالنسبة للنقطة (O)

\therefore مجموع عزوم القوى حول (O) = عزم محصلة هذه القوى حول (O) (وهو المطلوب)

النظرية العامة للعزوم

المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة ما يساوي عزم المحصلة حول نفس النقطة.

① المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى حول أي نقطة على خط عمل المحصلة = صفر
أي أن: إذا كانت $\sum M = 0$ خط عمل المحصلة (\vec{R})

فإن: $\sum M = 0$ صفر

② إذا كان المجموع الجبري لعزوم مجموعة من القوى حول نقطة يساوي صفر
فإن أن يكون مقدار المحصلة يساوي صفر أو خط عملها يمر بهذه النقطة.

أي أن: إذا كان $\sum M = 0$ صفر

فإن مقدار المحصلة $(\vec{R}) = 0$ صفر أو $\sum M = 0$ خط عمل المحصلة (\vec{R})

ملاحظات

① إذا كان عزم قوة \vec{Q} حول نقطة $A = 0$ عزمها حول نقطة B
أي: $\sum M_A = \sum M_B$ فإن: خط عمل \vec{Q} // \overline{AB}
وبصفة عامة: إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية

حول $A = 0$ مجموع عزوم هذه القوى حول B فإن خط عمل المحصلة // \overline{AB}

أي أن: إذا كان $\sum M_A = \sum M_B$ فإن: خط عمل (\vec{R}) (المحصلة) // \overline{AB}

② إذا كان عزم قوة \vec{Q} حول نقطة $A = -$ (عزمها حول نقطة B)
أي: $\sum M_A = - \sum M_B$ فإن: خط عمل \vec{Q} ينصف \overline{AB}
وبصفة عامة: إذا كان مجموع عزوم عدة قوى مستوية

حول $A = -$ مجموع عزوم هذه القوى حول B فإن خط عمل المحصلة ينصف \overline{AB}

أي أن: إذا كان $\sum M_A = - \sum M_B$ فإن: خط عمل (\vec{R}) (المحصلة) ينصف \overline{AB}

مثال ١

إذا كانت القوة $\vec{Q} = 4\vec{s} - 2\vec{v}$ تؤثر في النقطة $A = (2, 2)$ فأوجد متجه عزم القوة \vec{Q} بالنسبة إلى :

① نقطة الأصل (و) ② النقطة $B = (-1, 2)$

الحل

$$① \therefore \vec{OA} = 2\vec{s} + 2\vec{v}$$

$$\therefore \vec{H} = \vec{OA} \times \vec{Q}$$

$$\therefore \vec{H} = (2\vec{s} + 2\vec{v}) \times (4\vec{s} - 2\vec{v})$$

$$= -18\vec{k} = -18\hat{k}$$

$$② \therefore \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1\vec{s} + 2\vec{v}) - (2\vec{s} + 2\vec{v}) = -3\vec{s}$$

$$\therefore \vec{H} = \vec{AB} \times \vec{Q}$$

$$\therefore \vec{H} = (-3\vec{s}) \times (4\vec{s} - 2\vec{v})$$

$$= -12\vec{k} = -12\hat{k}$$

مثال ٢

إذا كانت القوة $\vec{Q} = 2\vec{s} - 4\vec{v}$ تؤثر في نقطة $A = (2, -1)$ فأوجد باستخدام العزوم طول العمود الساقط من النقطة $B = (8, -4)$ على خط عمل هذه القوة.

الحل

$$\therefore \vec{AB} = 6\vec{s} - 3\vec{v}$$

$$= (6\vec{s} - 3\vec{v}) \times (2\vec{s} - 4\vec{v}) = 10\vec{k}$$

$$\therefore \vec{H} = \vec{AB} \times \vec{Q} = 10\vec{k}$$

$$\therefore \|\vec{H}\| = 10 \quad \therefore 10 = \|\vec{H}\|$$

$$\therefore \|\vec{Q}\| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{20}$$

$$\therefore L = (\text{طول العمود الساقط من } B \text{ على خط عمل } \vec{Q}) = \frac{\|\vec{H}\|}{\|\vec{Q}\|} = \frac{10}{\sqrt{20}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54 \text{ وحدات طول.}$$

حل آخر:

$$\text{بفرض } \vec{m} \text{ منتصف } \vec{cd} \quad \therefore \vec{m} = \left(\frac{(2-) + 0}{2}, \frac{(4-) + 2}{2} \right) = (1-, 1-) = (1-, 1-)$$

$$\therefore \vec{m} - \vec{a} = \vec{a} - \vec{m} = (1- - 4-) - (1- - 2-) = (-3-, 1-) = (-3-, 1-)$$

$$\therefore \vec{m} - \vec{a} = \vec{a} - \vec{m} = (-3-, 1-) = (-3-, 1-) \quad \therefore \vec{m} - \vec{a} = \vec{a} - \vec{m} = (-3-, 1-) = (-3-, 1-)$$

$\therefore \vec{m} \exists$ خط عمل المحصلة \therefore خط عمل المحصلة يمر بمنتصف \vec{cd}

مثال ٤

قوة \vec{F} معيارها $10\sqrt{2}$ نيوتن وتعمل في اتجاه \vec{a} حيث $\vec{a} = (4, 4)$ ، $\vec{b} = (3, 5)$ أوجد متجه القوة \vec{F} ومتجه عزم \vec{F} بالنسبة لنقطة الأصل.

الحل

$$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a} = (4, 4) - (3, 5) = (1-, 1-) = (1-, 1-) \quad \therefore \vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a} = (1-, 1-) = (1-, 1-)$$

$$\therefore \vec{F} = \|\vec{F}\| \times \text{متجه وحدة في اتجاه القوة}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{\|\vec{a} - \vec{b}\|} \times 10\sqrt{2} = \frac{(1-, 1-)}{\sqrt{2}} \times 10\sqrt{2} = (10-, 10-) = (10-, 10-)$$

$$\therefore \vec{F} = \vec{a} \times \vec{F} = (4, 4) \times (10-, 10-) = (40-, 40-) = (40-, 40-)$$

مثال ٥

تؤثر القوتان $\vec{F}_1 = 7\sqrt{2}$ و $\vec{F}_2 = 2\sqrt{2}$ في النقطة $\vec{a} = (4, 1)$ وكان متجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة $\vec{O} = (0, 0)$ يساوي $42\sqrt{2}$ ومتجه عزم محصلتهما بالنسبة للنقطة $\vec{b} = (5, 1)$ يساوي $10\sqrt{2}$ أوجد قيمتي \vec{L} ، \vec{M} ثم عيّن معيار المحصلة وطول العمود النازل من \vec{b} على خط عمل المحصلة.

الحل

$$\therefore \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (7\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) + (2\sqrt{2}, 7\sqrt{2}) = (9\sqrt{2}, 9\sqrt{2}) = (9\sqrt{2}, 9\sqrt{2})$$

$$\therefore \vec{F} \times \vec{a} = (9\sqrt{2}, 9\sqrt{2}) \times (4, 1) = (9\sqrt{2} \times 1 - 9\sqrt{2} \times 4) = (9\sqrt{2} - 36\sqrt{2}) = (-27\sqrt{2})$$

$$= (-27\sqrt{2}) = (-27\sqrt{2})$$

$$(1) \quad 16 = L - M \therefore 42 = 26 - L - M \therefore \overrightarrow{E} \cdot 42 = \overrightarrow{E} \cdot 26 - \overrightarrow{E} \cdot L - \overrightarrow{E} \cdot M$$

$$(1, 0) = (0, 1) - (4, 1) = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{C} \therefore \overrightarrow{E} \cdot (1, 0) = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{A} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{A} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C}$$

$$\therefore \overrightarrow{E} \cdot (1, 0) = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{A} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{A} - \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C}$$

$$\overrightarrow{E} \cdot (L + 7) =$$

$$2 = L \therefore 10 = L + 7 \therefore \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10$$

$$\therefore \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10$$

وبالتعويض في (1) : $M = 4$

$$\therefore \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10$$

$$\therefore \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10 = \overrightarrow{E} \cdot 10$$

مثال 6

إذا كانت $\overrightarrow{C} = 2\overrightarrow{S} + 4\overrightarrow{V}$ وكان عزم القوة \overrightarrow{C} حول نقطة الأصل $\overrightarrow{E} \cdot 16$
أوجد عزم القوة \overrightarrow{C} حول النقطة $B = (-1, 0)$

الحل

لاحظ أن

عندما تكون نقطة تأثير القوة مجهولة :
نفرض أن خط عمل القوة يقطع محور السينات
في $A(0, s)$ ما لم تكن القوة موازية لمحور
السينات

أو

نفرض أن خط عمل القوة يقطع محور الصادات
في $A(0, s)$ ما لم تكن القوة موازية لمحور
الصادات

أو

نفرض أن نقطة تأثير القوة هي $A(s, v)$

نفرض أن $A(s, v)$ هي نقطة تأثير القوة \overrightarrow{C}

$$\overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C}$$

$$\overrightarrow{E} \cdot (2\overrightarrow{S} - 4\overrightarrow{V}) =$$

$$\therefore \overrightarrow{E} \cdot 16 = \overrightarrow{E} \cdot 16$$

$$(1) \quad 16 = 2s - 4v$$

$$\therefore \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C} = \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{C}$$

$$= (s + 1, v - 0) \times (0, 2) = (4, 2) \times (0, 2)$$

$$\overrightarrow{E} \cdot (10 + s - 4 + 2v) =$$

$$\overrightarrow{E} \cdot (19 + s - 4 + 2v) =$$

$$\therefore \overrightarrow{E} \cdot 20 = \overrightarrow{E} \cdot (19 + 16) = \overrightarrow{E} \cdot 35$$

وبالتعويض من (1) :

لاحظ أن

المعادلة (1) تسمى معادلة خط
عمل القوة \overrightarrow{C}

الوحدة 2

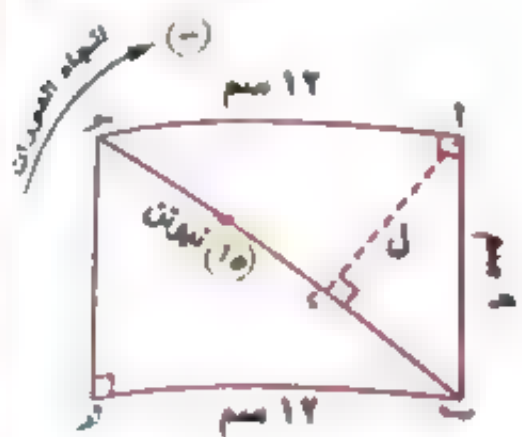
شكل (٣) : ترسم $SA \perp BC$

$\therefore L$ (ذراع القوة) SA

$$BC = \sqrt{144 + 81} = 15 \text{ سم}$$

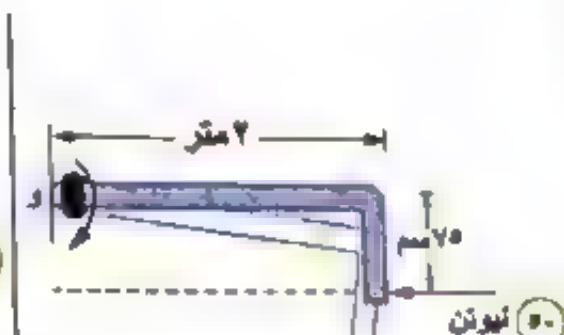
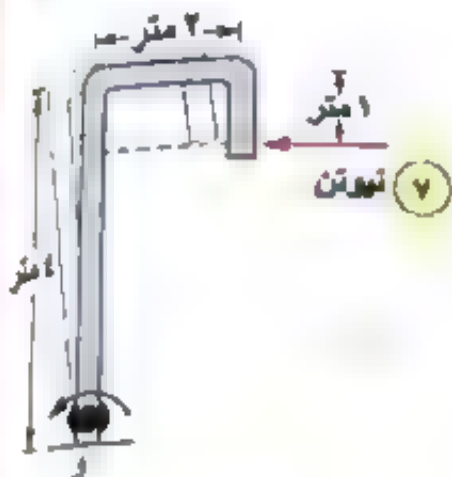
$$\therefore L = \frac{12 \times 9}{15} = \frac{1 \times 12}{5} = 2.4 \text{ سم}$$

$$\therefore J = -U = -L \times W = -2.4 \times 10 = -24 \text{ نيوتن.سم}$$



مثال ٨

في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبري لعزم القوة حول النقطة (و) مقدار بالنيوتن . متر



شكل (١)

شكل (٢)

شكل (٣)

الحل

$$\textcircled{1} J = -U = -L \times W = -2 \times 70 = -140 \text{ نيوتن . متر}$$

$$\textcircled{2} J = -U = -L \times W = -4 \times 40 = -160 \text{ نيوتن . متر}$$

$$\textcircled{3} J = -U = -L \times W = -2 \times 7 = -14 \text{ نيوتن . متر}$$

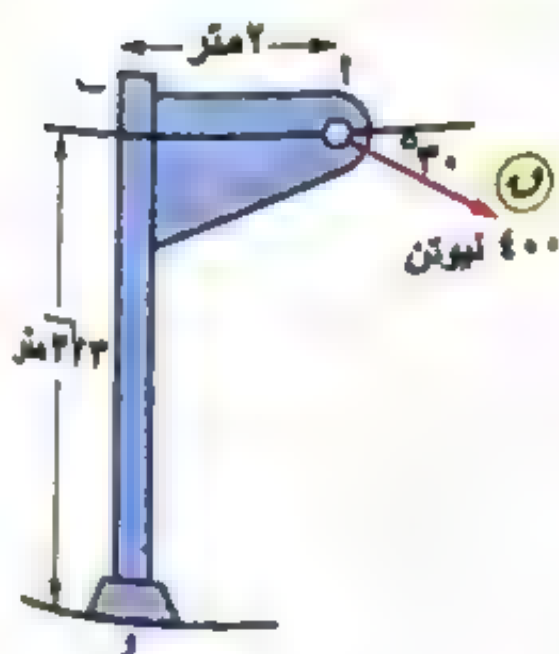
مثال ٩

في الشكل المقابل :

إذا كانت $W = 400$ نيوتن

أوجد القياس الجبري لعزم القوة (و)

بالنسبة للنقطة (و)



مثال

في ذلك
أوجد
حول

الحل

• بتحليل القوة ٤٠٠ نيوتن إلى مركبتين

$$F_x = 400 \cos 30^\circ = 346.4 \text{ نيوتن}$$

$$F_y = 400 \sin 30^\circ = 200 \text{ نيوتن}$$

وباستخدام مبدأ العزوم نجد أن :

$$\sum M = 0 \Rightarrow 400 \times 2 - 346.4 \times 3.464 - 200 \times 2 = 0$$

$$2200 - 1200 - 400 = 0$$

$$\Rightarrow 2200 \text{ نيوتن . متر}$$

حل آخر :

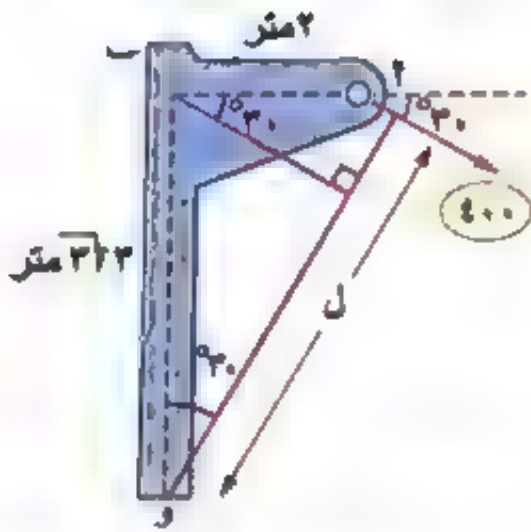
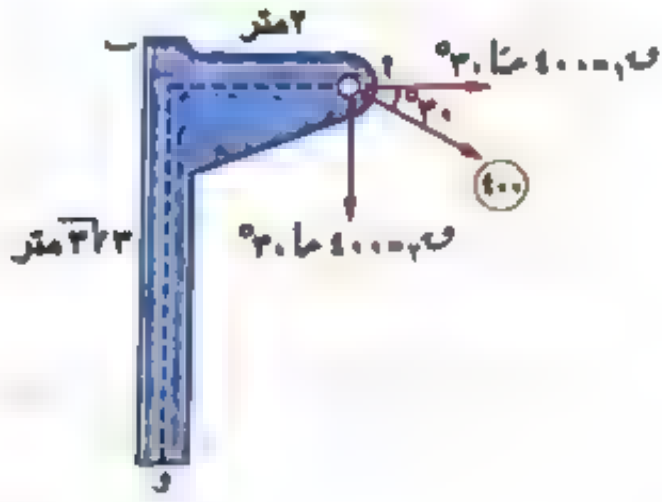
∴ طول العمود الساقط من (و) على

خط عمل القوة (٤٠٠ نيوتن) = ل

$$\text{حيث : } L = 2 \cos 30^\circ + 3.464 \sin 30^\circ = 2.5 \text{ متر}$$

$$\therefore \sum M = 0 \Rightarrow 400 \times L - 2200 = 0$$

$$\Rightarrow 2200 \text{ نيوتن . متر}$$



ملاحظة

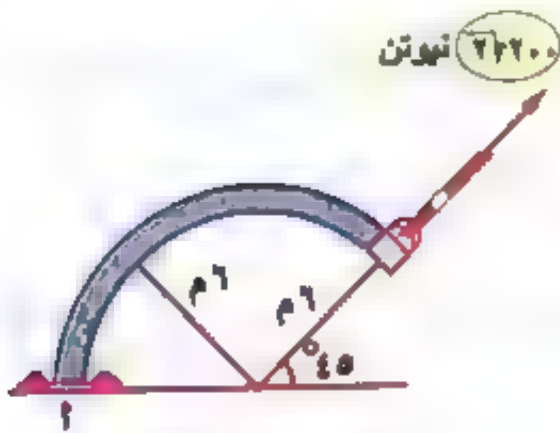
الحل باستخدام مبدأ العزوم أسهل.

مثال ١٠

في الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبري لعزم القوة ٢٠٠ نيوتن

حول النقطة أ



الوحدة 2

الحل

* نحلل القوة $200\sqrt{2}$ إلى القوتين :

($200\sqrt{2}$ حنا $45^\circ = 200$ نيوتن)

، ($200\sqrt{2}$ حنا $45^\circ = 200$ نيوتن)

ويستخدم مبدأ العزوم نجد أن :

$$ج = -200 \times 5 + 200 \times 1 = -1000$$

$$= -200 \times [6 + 6 \text{ حنا } 45^\circ] + 200 \times [6 \text{ حنا } 45^\circ]$$

$$= -200 \times 6\sqrt{2} + 200 \times 6\sqrt{2} = 0$$

$$= 1200 \text{ نيوتن. متر.}$$

حل آخر :

(بدون استخدام مبدأ العزوم)

من هندسة الشكل المقابل نجد أن :

$$ج = 200\sqrt{2} \times 6 \text{ حنا } 45^\circ = 1200 \text{ نيوتن. متر.}$$

ملاحظة

الحل بدون استخدام مبدأ العزوم أقصر.

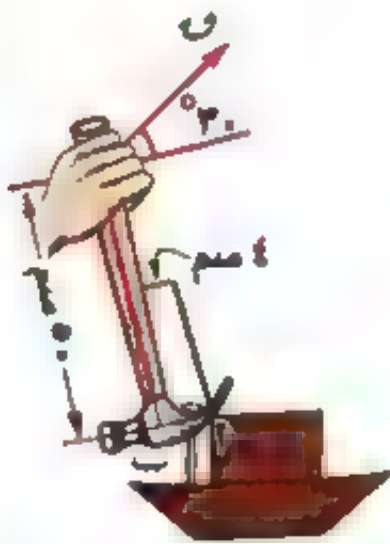
مثال ١١

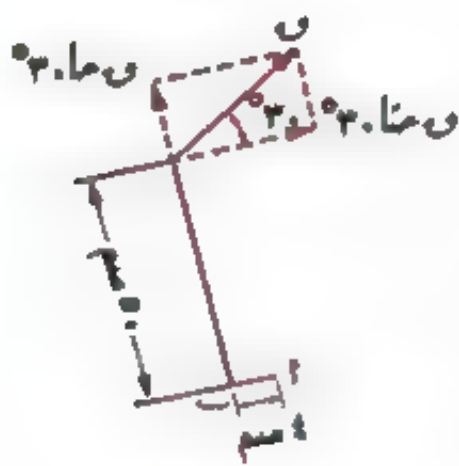
الشكل المقابل يوضح القوة 70 اللازمة لنزع مسمار

عن B إذا كان القياس الجبري لعزم القوة حول نقطة

A اللازمة لنزع المسمار يساوي 70 نيوتن. متر. مع

اتجاه عقارب الساعة. أوجد معيار القوة 70





بتحليل القوة U إلى مركبتين $U \cos \alpha$ ، $U \sin \alpha$ ،

$$70 = 30 \cos \alpha$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{70}{30} = 2.33$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1}(2.33) = 100^\circ$$

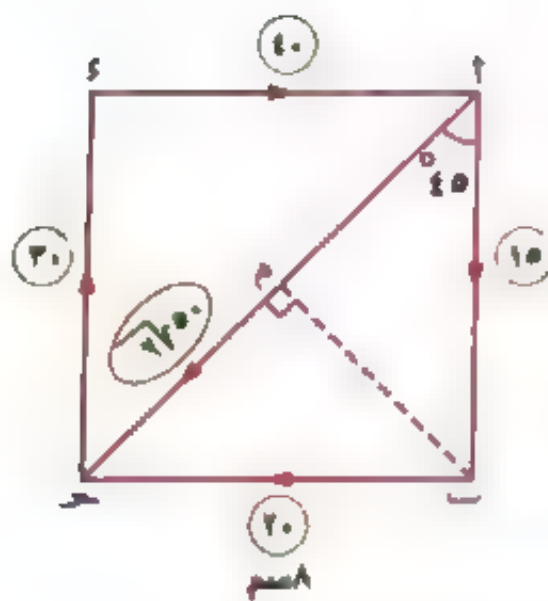
مثال ١٢

أ ب ح د مربع طول ضلعه ٨ سم تؤثر قوى مقاديرها ١٥ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ نيوتن

في أ ب ، ب ح ، ح د ، د أ ، أ ب على الترتيب.

احسب المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول الرأس ب

الحل



\therefore القوتان اللتان مقداراهما ١٥ ، ٢٠ نيوتن

خطا عملهما يمران بالنقطة ب

\therefore القياس الجبري لعزم كل منهما بالنسبة للنقطة ب = صفر

\therefore ذراع القوة التي مقدارها ٢٠ نيوتن = ب ح = ٨ سم

\therefore القياس الجبري لعزم القوة التي مقدارها ٢٠ نيوتن = ٨ × ٢٠ = ١٦٠ نيوتن.سم

\therefore ذراع القوة التي مقدارها ٤٠ نيوتن = ب د = ٨ سم

\therefore القياس الجبري لعزم القوة التي مقدارها ٤٠ نيوتن = ٨ × ٤٠ = ٣٢٠ نيوتن.سم

\therefore ذراع القوة التي مقدارها ٥٠ نيوتن = ب د = ٨ سم \therefore ٥٠ × ٨ = ٤٠٠ نيوتن.سم

\therefore القياس الجبري لعزم القوة التي مقدارها ٥٠ نيوتن = ٤٠٠ + ٣٢٠ = ٧٢٠ نيوتن.سم

\therefore المجموع الجبري لعزوم القوى حول ب (ج) = ٧٢٠ - ٣٢٠ - ٤٠٠ = ٠ نيوتن.سم

ملاحظة

في المثال السابق :

رسم المربع أ ب ح د بحيث كان الاتجاه الدوراني لرؤوسه في اتجاه دوران عقارب الساعة فإذا
رسم المربع بحيث كان الاتجاه الدوراني لرؤوسه في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة لكان
المجموع الجبري لعزوم القوى حول ب (ج) = ١٦٠ نيوتن. سم أي تتغير إشارة العزم فقط.

مثال ١٢

أ ب ح د ه و سداسي منتظم طول ضلعه ٤ سم ورؤوسه مرتبة في عكس اتجاه دوران عقارب
الساعة ، أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٣ ، ٥ ، ٢ ، ٤ ، ٦ نيوتن
في أ ب ، ب ح ، ح د ، د ه ، ه و ، و أ على الترتيب.
أوجد المجموع الجبري لعزوم القوى حول كل من م (مركز السداسي) ، الرأس ؟

الحل

① نرسم م ن \perp أ ب فيكون :

$$م ن = م أ = ٦٠ \text{ سم} \quad ٢ \sqrt{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٤ = ٢ \sqrt{٣} \text{ سم}$$

$$\therefore \text{نراع العزم حول م لكل قوة} = ٢ \sqrt{٣} \text{ سم}$$

$$\therefore \text{المجموع الجبري لعزوم القوى حول م}$$

$$= ٢ \sqrt{٣} \times (٦ - ٤ + ٢ + ٥ - ٣ + ١) =$$

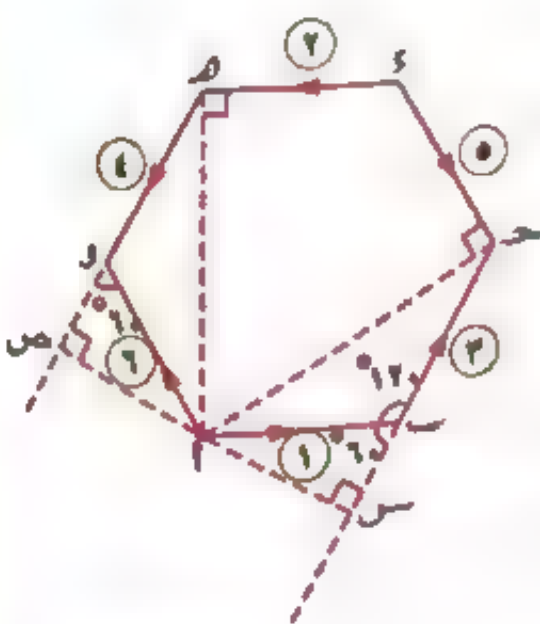
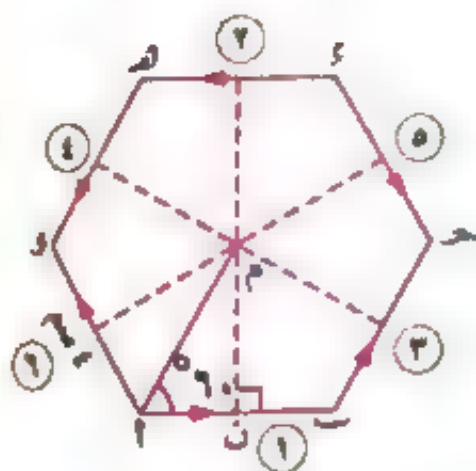
$$= ٢ \sqrt{٣} \text{ نيوتن. سم}$$

② نرسم أ ص \perp ح ب ، أ ص \perp د ه

ونصل أ ح ، أ ه

$$\therefore \text{ق (د أ ب ص)} = \text{ق (د أ و ص)} = ٦٠$$

$$\therefore \text{أ ص} = \text{أ ه} = ٦٠ \text{ سم} \quad ٢ \sqrt{٣} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times ٤ = ٢ \sqrt{٣} \text{ سم}$$



$$أه = اه = ٨$$

$$= ٢\sqrt{٢} \times \text{طول ضلع السداسي (خواص السداسي المنتظم)}$$

$$\therefore اه = أه = ٨ = ٢\sqrt{٢} \text{ سم ، } اه \perp حد ، اه \perp هس$$

\therefore المجموع الجبري لعزوم القوى حول أ

$$= ٠ \times ٦ + ٢\sqrt{٢} \times ٤ + ٢\sqrt{٢} \times ٢ + ٢\sqrt{٢} \times ٥ - ٢\sqrt{٢} \times ٣ + ٠ \times ١ =$$

$$= ٢\sqrt{٢} \times ٦ = ٢\sqrt{٢} \times ٨ + ٢\sqrt{٢} \times ٨ + ٢\sqrt{٢} \times ٢٠ - ٢\sqrt{٢} \times ٦ = ٢\sqrt{٢} \times ٢٠ \text{ نيوتن. سم.}$$

مثال ١٤

أب حء مربع طول ضلعه = ٨ سم أثرت القوى ٢، ٥، ٧، ٩، ٦، ٨، ٢ ثقل جرام في أ ب ، ح ب ، حء ، آء ، آح ، حب على الترتيب فإذا كان خط عمل محصلة هذه القوى يوازي آح فأوجد قيمة : ٧

الحل

\therefore أ ب حء مربع

$$\therefore اه = هب = ٨ = ٢\sqrt{٢} \text{ سم}$$

$$\therefore أه = مء = ٨ = ٢\sqrt{٢} \text{ سم}$$

\therefore خط عمل محصلة القوى // آح $\therefore ج_١ = ج_٢$

$$\therefore ج_١ = ج_٢ = ٨ \times ٥ + ٠ \times ٦ + ٠ \times ٧ + ٨ \times ٩ - ٨ \times ٢ - ٠ \times ٤ = ٢٤$$

$$= ٤٠ - ٨ = ٣٢$$

$$ج_٢ = ٨ \times ٢ - ٠ \times ٤ + ٨ \times ٧ + ٠ \times ٩ + ٠ \times ٥ - ٨ \times ٦ = ٢٤$$

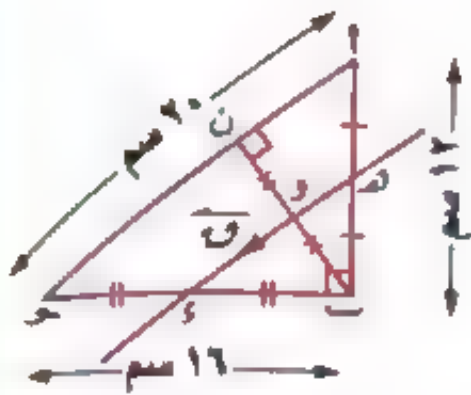
$$= ١٦ - ٥٦ + ٦٤ = ٢٤$$

$$\therefore ١٦ = ٧ \text{ ث. جم.}$$

$$\therefore ٢٤ = ٧ \times ٨ - ١٠٤ = ٢٤$$

أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه : $أ ب = ١٢$ سم ، $ب ح = ١٦$ سم
، أثرت قوة $ق$ في مستوى المثلث وكان عزم $ق$ حول $أ =$ عزمها حول $ح = ٧٢$ نيوتن. سم
وكان عزم $ق$ حول $ب = ٧٢$ نيوتن. سم عيّن مقدار واتجاه وخط عمل $ق$

الحل



$$أ ب ح = ١٢ + ١٤٤ = ٢٥٦ = ٤٠٠ \sqrt{٢} = ٢٠ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{عزم } ق \text{ حول } أ = \text{عزم } ق \text{ حول } ح$$

$$\therefore \text{خط عمل } ق \text{ يوازي } أ ب$$

$$\therefore \text{عزم } ق \text{ حول } ب = - (\text{عزم } ق \text{ حول } ح)$$

$$\therefore \text{خط عمل } ق \text{ يمر بمنتصف } ب ح \text{ وليكن } د$$

من (١) ، (٢) :

$$\therefore \text{خط عمل } ق \text{ يوازي } أ ب \text{ وينصف } ب ح \text{ وأيضا ينصف } أ ب$$

\therefore العزم حول ب إشارته موجبة

$$\therefore ق \text{ تعمل في اتجاه } د \text{ حيث } د \text{ منتصف } أ ب$$

ولحساب $ق$ (معيّار $ق$) فإن :

$$\therefore \text{عزم } ق \text{ حول } ب = ٧٢ \text{ نيوتن. سم}$$

$$\therefore ٧٢ = ق \times ب د$$

$$\text{لكن : } ب د = \frac{١}{٢} ب ح = \frac{١}{٢} \times \frac{أ ب \times ب ح}{أ ب} = \frac{١٦ \times ١٢}{٢ \times ١٢} \times \frac{١}{٢} = ٤,٨ \text{ سم}$$

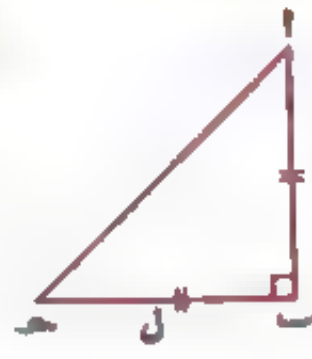


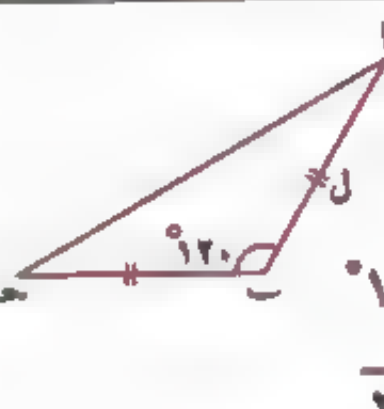

$$\therefore ٧٢ = ٤,٨ \times ق$$

$$\therefore ق = \frac{٧٢}{٤,٨}$$

$$\therefore ق = ١٥ \text{ نيوتن.}$$

ملاحظات

في كل من الأشكال الهندسية التالية نجد أنه :

<p>① إذا كان ΔABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين</p>  <p>فإن : $AC = BC = \frac{\sqrt{2}}{2} AB$</p>	<p>② إذا كان ΔABC ثلاثينيًا متساويًا</p>  <p>فإن : $AC = BC = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$</p>
<p>③ إذا كان ΔABC متساوي الأضلاع</p>  <p>فإن : $AC = BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$</p>	<p>④ إذا كان ΔABC متساوي الساقين</p>  <p>فإن : $AC = BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AB$</p>
<p>⑤ إذا كان $ABCDEF$ سداسيًا منتظمًا</p>  <p>فإن : $AC = CE = \sqrt{3} L$ ، $AD = 2L$</p>	

معلومة إضافية

① إذا أثرت قوة \vec{Q} في النقطة N وكان \vec{AB} ينتمي لمستوى Q وكانت M منتصف \vec{AB} وكان \vec{AM} ، \vec{MB} ، \vec{AB} هي القياسات الجبرية لعزم القوة حول النقط A ، B ، M على الترتيب

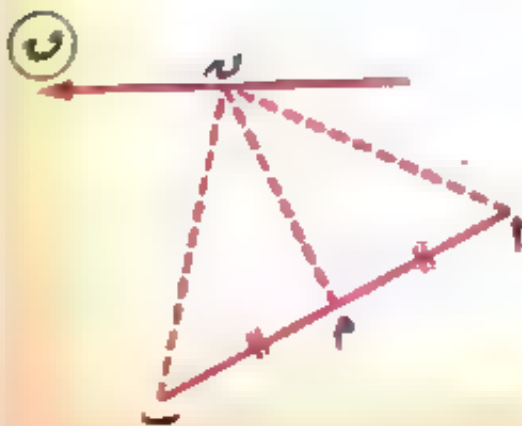
فإن : $\vec{M} = \vec{A} + \vec{B}$

* الإثبات :

$$\vec{M} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow \vec{Q} \times \vec{AN} + \vec{Q} \times \vec{BN} = \vec{Q} \times \vec{AM} + \vec{Q} \times \vec{BM}$$

$$\vec{Q} \times (\vec{AN} + \vec{BN}) = \vec{Q} \times (\vec{AM} + \vec{BM})$$

$$\vec{Q} \times \vec{AB} = \vec{Q} \times \vec{AB} = \vec{M}$$



● **فمثلاً:** إذا كانت قوة تؤثر في مستوى Δ AB وكانت M منتصف AB

وكان $ج_1 = 20$ نيوتن سم ، $ج_2 = 12$ نيوتن سم

$\therefore ج_3 = \frac{1}{2} (ج_1 + ج_2) = 16$ نيوتن سم

تعميم : إذا كانت M تقسم AB من الداخل بنسبة $2 : 2$

وباستخدام تقسيم قطعة مستقيمة نجد أن :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AM}$$

$$\text{أي أن : } ج_3 = ج_1 + ج_2 = 20 + 12 = 32$$

② إذا أثرت قوة Q في مستوى متوازي أضلاع $ABCD$ وكان M ، $ج_1$ ، $ج_2$ ، $ج_3$

هي القياسات الجبرية لعزم القوة حول رؤوس متوازي الأضلاع الأربعة على الترتيب

$$\text{فإن : } ج_1 + ج_2 = ج_3 + ج_4$$

* الإثبات :

نفرض أن Q تؤثر في مستوى متوازي أضلاع $ABCD$

$\therefore M$ منتصف AC

$$\therefore ج_1 + ج_2 = ج_3 + ج_4 \quad (1)$$

، $\therefore M$ منتصف BD

$$\therefore ج_1 + ج_2 = ج_3 + ج_4 \quad (2)$$

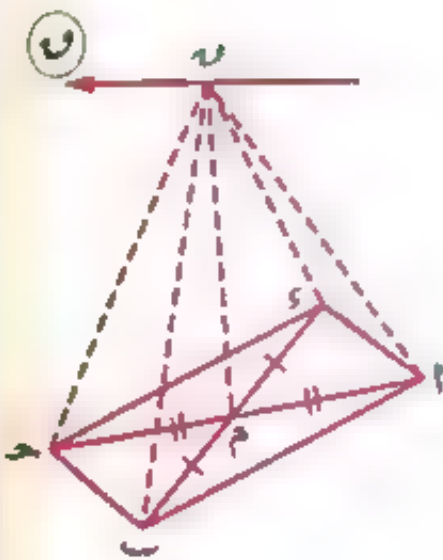
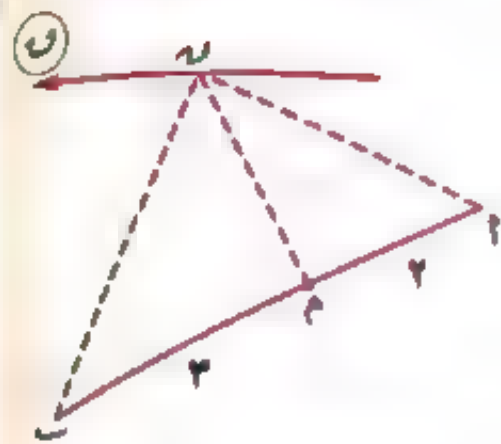
$$\text{من (1) ، (2) : } \therefore ج_1 + ج_2 = ج_3 + ج_4$$

● **فمثلاً:** إذا أثرت قوة Q في مستوى متوازي أضلاع $ABCD$ وكان M ، $ج_1 = 18$ نيوتن متر

، $ج_2 = 24$ نيوتن متر ، $ج_3 = 20$ نيوتن متر

$$\therefore ج_1 + ج_2 = ج_3 + ج_4 \quad \therefore 18 + 24 = 20 + ج_4$$

$$\therefore ج_4 = 22 \text{ نيوتن متر}$$





على عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة في نظام إحداثي ثنائي الأبعاد

(من أسئلة الكتاب المدرسي)

أولاً: تمارين على إيجاد العزم باستخدام الصيغة الاتجاهية

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كانت القوة \vec{F} تؤثر في نقطة (٢) ، \vec{r} هو متجه عزم \vec{F} حول نقطة (و) فإن

$$(1) \vec{r} = \vec{F} \times \vec{r} \quad (ب) \vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

$$(ج) \vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{r} \quad (د) \vec{r} = \vec{F} \times \vec{r}$$

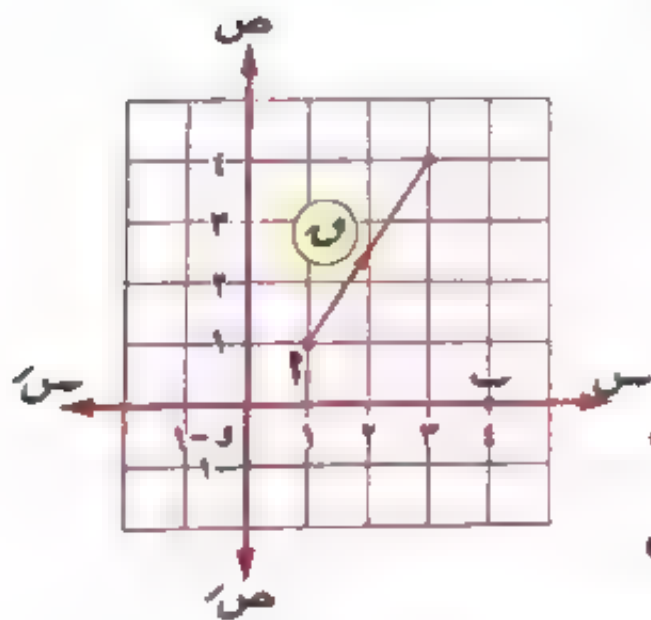
٢) إذا كانت : $\vec{F} = 2\vec{s} - 3\vec{v}$ ، $\vec{r} = (1, 2)$ خط عمل \vec{F} ، ونقطة الأصل فإن : $\vec{r} = \vec{F} \times \vec{r} = \dots\dots\dots \vec{r}$

$$(1) -8 \quad (ب) 8 \quad (ج) 1 \quad (د) 7$$

٣) إذا أثرت القوة $\vec{F} = 2\vec{s} + 5\vec{v}$ في النقطة $\vec{r} = (-3, 1)$ فإن متجه عزم \vec{F} بالنسبة للنقطة $\vec{r} = (2, -4)$ يساوي

$$(1) 15\vec{r} \quad (ب) 35\vec{r} \quad (ج) -\vec{r} \quad (د) -35\vec{r}$$

٤) في الشكل المقابل :



إذا كانت : $\vec{F} = 2\vec{s} + 2\vec{v}$ وتؤثر في نقطة $\vec{r} = (1, 1)$ فإن عزم القوة \vec{F} بالنسبة للنقطة $\vec{r} = (0, 4) = \dots\dots\dots \vec{r}$

$$(1) -110 \quad (ب) 110 \quad (ج) 70 \quad (د) 90$$

٥) إذا كانت : $\vec{F} = 7\vec{v}$ تؤثر في النقطة $\vec{r} = (-2, 0)$ فإن عزم القوة \vec{F} بالنسبة للنقطة $\vec{r} = (1, -2)$ هو

$$(1) 28\vec{r} \quad (ب) 28\vec{r} \quad (ج) 14\vec{r} \quad (د) -14\vec{r}$$

٦ إذا كانت : $\vec{Q} = 6\vec{s} - 8\vec{v}$ تؤثر في النقطة $A = (2, -2)$ فإن طول العمود الساقط من النقطة $B(4, 2)$ على خط عمل \vec{Q} = وحدة طول.

- (أ) ٥, ٤ (ب) ٢, ٨ (ج) ٢٨ (د) ٤, ٤

٧ إذا كان خط عمل $\vec{Q} // \vec{AB}$ ، $\vec{M} = 12\vec{E}$ فإن : $\vec{M} = \vec{E}$ \vec{E}

- (أ) ١٢ (ب) ١٢- (ج) ٦ (د) ٢٤

٨ إذا كان مجموع عزوم القوى حول A = مجموع عزوم القوى حول B فإن خط عمل المحصلة يكون

- (أ) عمودي على \vec{AB} (ب) موازيًا \vec{AB}
(ج) مارًا بمنتصف \vec{AB} (د) ينطبق على \vec{AB}

٩ إذا انعدم مجموع عزوى قوة \vec{Q} حول النقطتين A ، B فإن خط عمل \vec{Q}

- (أ) يوازي \vec{AB} (ب) عمودي على \vec{AB}
(ج) يمر بالنقطة A أو النقطة B (د) يمر بمنتصف \vec{AB}

١٠ إذا كانت : $\vec{Q} \neq 0$ فإن جميع ما يلي صحيح ما عدا

- (أ) خط عمل $\vec{Q} // \vec{AB}$ فإن : $\vec{M} - \vec{E} = \vec{E}$
(ب) خط عمل \vec{Q} ينصف \vec{AB} فإن : $\vec{M} + \vec{E} = \vec{E}$
(ج) إذا كانت : $A \in$ لخط عمل \vec{Q} فإن : $\vec{M} \neq \vec{E}$
(د) إذا كان خط عمل \vec{Q} يعمل في \vec{AB} فإن : $\vec{M} = \vec{E} = \vec{E}$

١١ إذا كان القوة $\vec{Q} = (4, 8)$ تؤثر في نقطة $A(4, 8)$ وكان عزم \vec{Q} بالنسبة للنقطة $B(2, 9)$ يساوي $40\vec{E}$ فإن : $L + M =$

- (أ) ٤٠ (ب) ٢٠ (ج) ١٠ (د) ٨٠

١٢ إذا كانت : $\vec{Q} = 5\vec{s} + 12\vec{v}$ ومعادلة خط عملها $12\vec{s} + 5\vec{v} = 0$ فإن عزم القوة \vec{Q} بالنسبة للنقطة $B(-2, 1)$ يساوي

- (أ) صفر (ب) ١١- (ج) ٣١ (د) ٤١

١٣ إذا كانت : $\vec{Q} = 5\vec{S} + 4\vec{V}$ وكانت النقطتان أ ، ب في مستوى \vec{Q}

حيث أ (٢ ، ٣) وكان : $\vec{M} = \vec{J}$ فإن معادلة المستقيم \vec{AB} هي

(١) $4\vec{S} - 5\vec{V} + 7 = 0$ (ب) $5\vec{S} - 4\vec{V} + 7 = 0$

(ج) $4\vec{S} - 5\vec{V} = 0$ (د) $5\vec{S} + 4\vec{V} + 7 = 0$

١٤ إذا كان عزم القوة $\vec{Q} = 4\vec{S} + 6\vec{V}$ بالنسبة لنقطة الأصل يساوي $80\vec{G}$

فإن معادلة خط عمل \vec{Q} هي

(١) $2\vec{S} + 3\vec{V} = 40$ (ب) $4\vec{S} + 3\vec{V} = 10$

(ج) $3\vec{S} - 2\vec{V} = 40$ (د) $3\vec{S} - 2\vec{V} = 80$

١٥ قوة \vec{Q} متجه عزمها بالنسبة للنقطة (٢ ، ٥) هو $6\vec{G}$ ومتجه عزمها بالنسبة للنقطة

(١ ، ١) هو $-6\vec{G}$ فإن متجه عزمها بالنسبة للنقطة = صفر

(١) $(-1, 3)$ (ب) $(2, 2)$ (ج) $(2, 6)$ (د) $(1, 3)$

١٦ إذا كان خط عمل $\vec{Q} = \vec{S} + \vec{V}$ ينصف \vec{AB} حيث أ (٢ ، ١-)

وكانت ب (١ ، ٤) منتصف \vec{AB} فإن : $\vec{M} = \vec{G}$

(١) -7 (ب) 7 (ج) 2 (د) -14

١٧ (دور أول ٢٠٢٠) إذا كان : $\vec{Q} = 3\vec{S} - 2\vec{V}$ ، أ (١- ، ٢) ، عزم \vec{Q} حول أ

هو $\vec{M} = 9\vec{G}$ ، عزم \vec{Q} حول ب هو $\vec{M} = 9\vec{G}$ فإن إحداثيات النقطة ب يمكن

أن يمثلها جميع الأزواج المرتبة الآتية ماعدا

(١) $(5, -2)$ (ب) $(2, 0)$ (ج) $(-8, 4)$ (د) $(8, -4)$

٢ إذا كانت : $\vec{Q} = 3\vec{S} + 4\vec{V}$ تؤثر في النقطة أ (١- ، ٣) من جسم أوجد :

١ عزم القوة \vec{Q} بالنسبة لنقطة الأصل و (٠ ، ٠)

٢ طول العمود الساقط من النقطة (و) على خط عمل القوة \vec{Q} $-12\vec{G}$ ، 2.6 وحدة طول.

٣ إذا كانت : $\vec{Q} = \vec{S} - 2\vec{V}$ تؤثر في النقطة أ (٢ ، ٢) أوجد :

١ عزم القوة \vec{Q} بالنسبة للنقطة ب (٢ ، ١)

٢ طول العمود الساقط من النقطة ب على خط عمل القوة. $-2\vec{G}$ ، $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

٤ إذا كانت : $\vec{Q} = 1\vec{S} - 2\vec{V}$ تؤثر في نقطة أ (٥ ، ٢) وكان متجه عزم \vec{Q} بالنسبة

لنقطة ب (٧ ، -٤) يساوي $20\vec{G}$ فأوجد قيمة : ل $-\frac{8}{3}$

إذا كانت : $\vec{Q} = 3\vec{S} - 4\vec{V}$ تؤثر في نقطة $A(2, 0)$ وكانت :

$B(2, 3)$ ، $C(3, 2)$ ، $D(-2, 1)$ ، $E(0, 5)$ ، $F(1, -5)$

فأثبت باستخدام العزوم أن خط عمل \vec{Q} :

(3) يوازي \vec{DE}

(1) يمر بنقطة B

(2) ينصف \vec{CD}

أثرت القوتان \vec{Q} ، $\vec{P} = 5\vec{S} - 4\vec{V}$ ، $\vec{Q} = 3\vec{S} - 4\vec{V}$ في نقطة الأصل

، أثبت أن خط عمل محصلتهما يمر بالنقطة $A(2, 3)$ ثم أوجد طول العمود الساقط من النقطة $B(2, 3)$ على خط عمل المحصلة.

القوى : $\vec{Q} = 2\vec{S} - 2\vec{V}$ ، $\vec{P} = 5\vec{S} + \vec{V}$ ، $\vec{Q} = 4\vec{S} - \vec{V}$ ، $\vec{P} = 7\vec{S} + \vec{V}$

تؤثر في النقط $A(1, 1)$ ، $B(2, 2)$ ، $C(3, 1)$ على الترتيب.

أوجد متجه عزم المحصلة بالنسبة لنقطة الأصل $(0, 0)$.

تؤثر القوتان : $\vec{Q} = 3\vec{S} + 2\vec{V}$ ، $\vec{P} = 3\vec{S} - \vec{V}$ في النقطة $A(2, 2)$

برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة ينصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين $B(1, 5)$ ، $C(2, 1)$

القوى : $\vec{Q} = 2\vec{S} - \vec{V}$ ، $\vec{P} = 5\vec{S} + 2\vec{V}$ ، $\vec{Q} = 2\vec{S} - \vec{V}$ ، $\vec{P} = 2\vec{S} + \vec{V}$

تؤثر في النقطة $A(1, 1)$ برهن باستخدام العزوم أن خط عمل المحصلة يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(2, 1)$ ، $(6, 4)$

قوة : $\vec{Q} = 12\vec{S} + 4\vec{V}$ تؤثر في النقطة $A(2, 5)$ ، خط عملها ينصف القطعة

المستقيمة BC حيث : $B(1, 2)$ ، $C(1, 9)$

أوجد : قيمة 4 ، بُعد النقطة B عن خط عمل \vec{Q}

5 ، $\frac{42}{13}$ وحدة طول

تؤثر القوتان : $\vec{Q} = 3\vec{S} + 2\vec{V}$ ، $\vec{P} = 3\vec{S} - \vec{V}$ عند

النقطتين $A(1, 1)$ ، $B(1, -2)$ على الترتيب. عيّن قيمة كل من الثابتين

m ، l بحيث ينعدم مجموع عزمي هاتين القوتين بالنسبة لنقطة الأصل «و» ، بالنسبة

للنقطة $B(2, 2)$


$\frac{12}{9}$ ، $\frac{7}{9}$

١٢ ﴿تَوَثَّرَ الْقَوْءُ﴾ فِي النِّقْطَةِ ٢ (-٣ ، ٢) فَإِذَا كَانَ عِزْمٌ ﴿حَوْلَ كُلِّ مِنَ النِّقْطَتَيْنِ﴾
ب (١ ، ٣) ، ح (-١ ، ٤) يَسَاوِي ٢٨ ع أَوْجَدَ : ﴿٨ س - ٦ ص﴾

١٣ قوة: $\vec{Q} = \vec{L} + \vec{M} + \vec{N}$ تؤثر في النقطة ٢ = (١ ، ٢) ، القياس الجبري لعزم هذه القوة بالنسبة للنقطة (-٥ ، ٠) يساوي -٢١ وحدة عزم وينعدم عزمها بالنسبة للنقطة (٢ ، -٧) أوجد مقدار \vec{Q} ومعادلة خط عملها.

$\vec{Q} = \vec{N} - \vec{M} = \vec{L}$ ، $\|\vec{Q}\| = \sqrt{17}$ وحدة قوة ، $\vec{Q} = \vec{L} + \vec{M} + \vec{N} = 1 =$ صفري

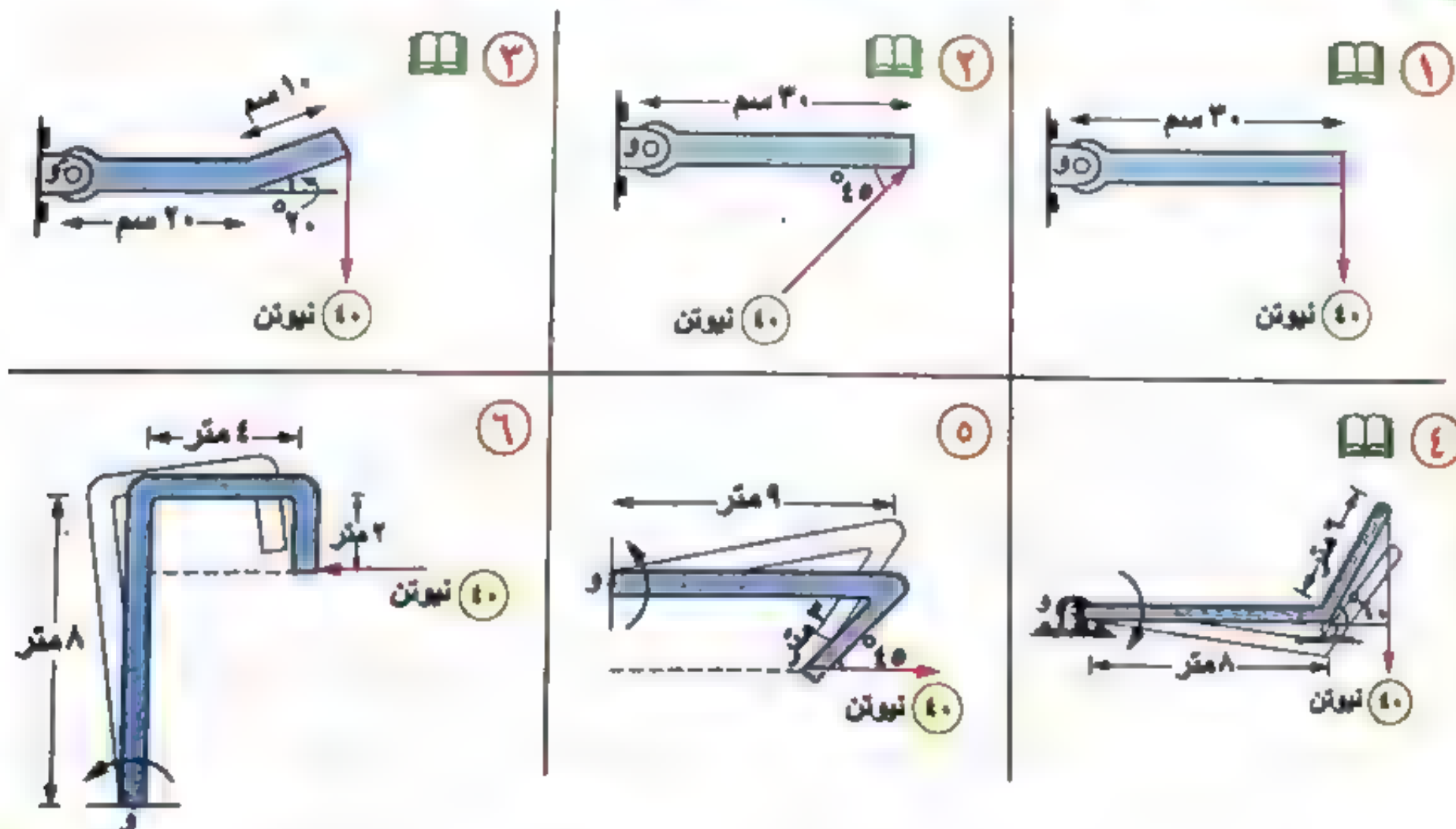
(دور اول ٢٠٠٨) أثرت قوة $\overline{ق}$ في مستوى المثلث $أ ب ح$ حيث $أ(٢، ٣)$ ، $ب(١، -٤)$
 $ح(-١، ٠)$ بحيث كان : $\overline{ج} = \overline{م} = \overline{ن} = \overline{و} = \overline{ز} = \overline{ح}$ ، $\overline{ع} = \overline{ف} = \overline{ك} = \overline{ل} = \overline{س} = \overline{ط} = \overline{ي} = \overline{ق}$
 أوجد : $\overline{ق}$ وعيّن مقدارها.

١٥  قوة $\bar{ق}$ معيارها يساوي ١٥ ث. جم وتعمل في $\bar{أ}$ حيث : $\bar{أ} = (١ ، ٣)$ ،
 $\bar{ب} = (١ ، ٤)$ أوجد متجه عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل.
 « ٣٩ ع »

١٦ إذا كان القياس الجبري لعزم قوة \vec{P} حول كل من النقط و $(0, 0)$ ، $E(1, 0)$ ، $H(0, 2)$ يساوي ٢٧ ، ١٨ ، $\frac{1}{4} \times ٤٠$ وحدة عزم أوجد : \vec{P}

تاریخ: ۱۳۸۵/۰۵/۰۵

في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبري لعزم القوة حول النقطة (و) :



المحاضر (استاتيكا - فوج) ۷۴ / ۵۵ ثانوی ۹۷

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ ☐ قوة مقدارها ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن نقطة أ مسافة ٨ سم فإن معيار عزمها حول أ يساوي نيوتن.سم.

- (١) ٤٠ (ب) صفر (ج) ٢٠٠ (د) ٤٠٠

٢ ☐ أ ب ح مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٨ سم أثرت قوة مقدارها ١٥ نيوتن في ب ح فإن معيار عزم القوة بالنسبة للنقطة أ هو وحدة عزم.

- (١) $3\sqrt{3}$ ٤٠ (ب) ٦٠ (ج) $3\sqrt{3}$ ٦٠ (د) ١٢٠

٣ ☐ قوة مقدارها ٧٠ نيوتن تؤثر في أ ب حيث أ ب ح د مربع طول ضلعه ١٠ سم فإن معيار عزم القوة بالنسبة لمركز المربع يساوي نيوتن.سم.

- (١) $2\sqrt{2}$ ١٧٥ (ب) ٣٥٠ (ج) $2\sqrt{2}$ ٣٥٠ (د) ٧٠٠

٤ في الشكل المقابل :

إذا كان عزم القوة ١٨ نيوتن حول

النقطة أ يساوي صفر

فإن : $\theta = \dots\dots\dots$

(١) $\frac{2}{3}$

(ج) $\frac{1}{3}$

(ب) $\frac{2}{3}$

(د) $\frac{1}{3}$



٥ في الشكل المقابل :

إذا كان عزم القوة ٥٠ نيوتن حول

النقطة أ يساوي $3\sqrt{2}$ ١٠٠ نيوتن.سم.

فإن : أ ب = سم.

(١) ٢

(ب) ٣

(ج) ٤

(د) ٥



٦ ☐ في الشكل المقابل :

معيار عزم القوة حول

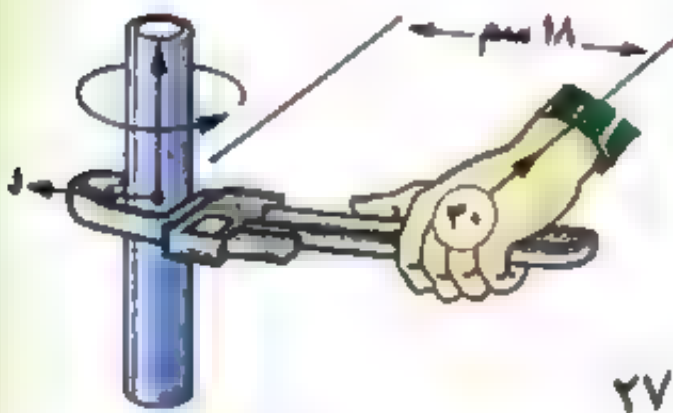
نقطة (و) يساوي وحدة عزم.

(١) ٥٤٠ -

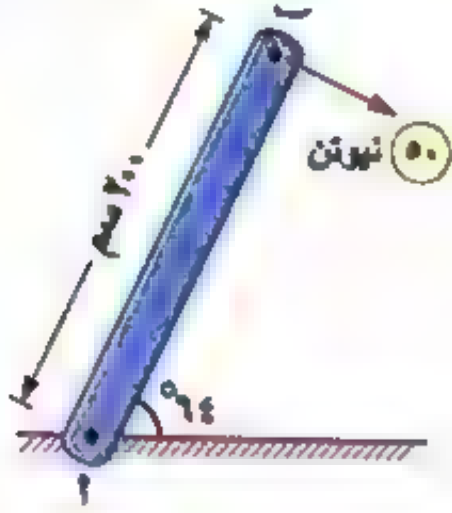
(ب) ٢٧٠

(ج) ٢٧٠ -

(د) ٥٤٠



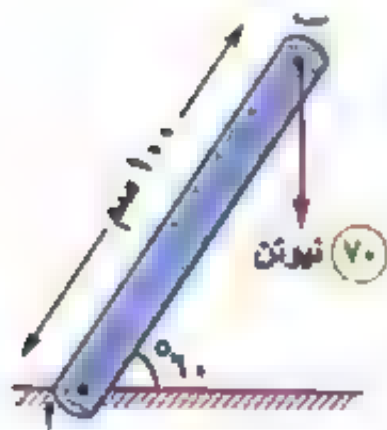
٧ في الشكل المقابل :



قضيب مثبت بمفصل عند أ أثرت على الطرف ب قوة مقدارها ٥٠ نيوتن في اتجاه عمودي على القضيب فإن عزم القوة حول نقطة أ يساوي نيوتن. متر.

- (أ) ١٠ (ب) ٢١٠ (ج) ١٠٠٠٠ ما ٦٤ (د) ١٠٠ ما ٦٤

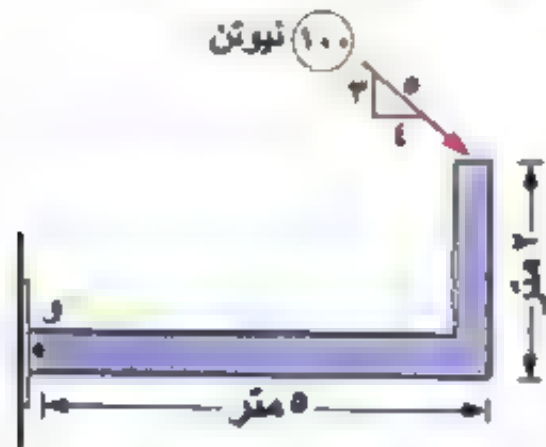
٨ في الشكل المقابل :



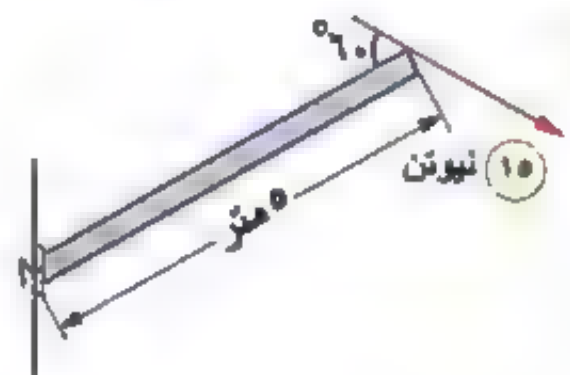
قضيب مثبت بمفصل عند أ أثرت على الطرف ب قوة رأسية لأسفل مقدارها ٧٠ نيوتن. فإن معيار عزم القوة حول نقطة أ يساوي نيوتن. متر.

- (أ) ٣٥ (ب) ٣٧٣٥ (ج) ٧٠ (د) ٣٧٧٠

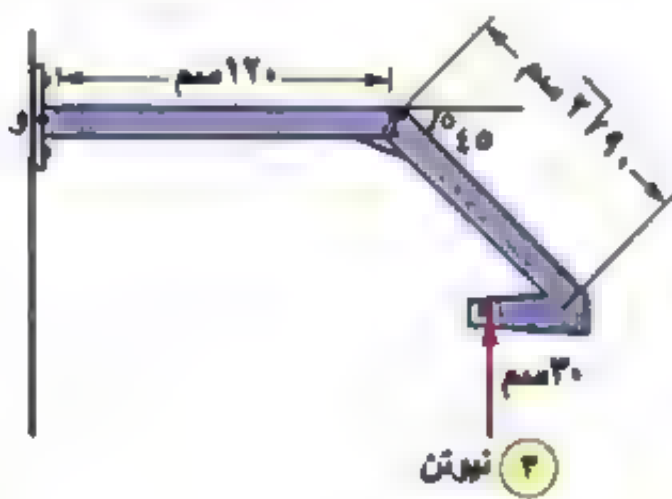
٣ في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبري لعزم القوة حول النقطة (و) :



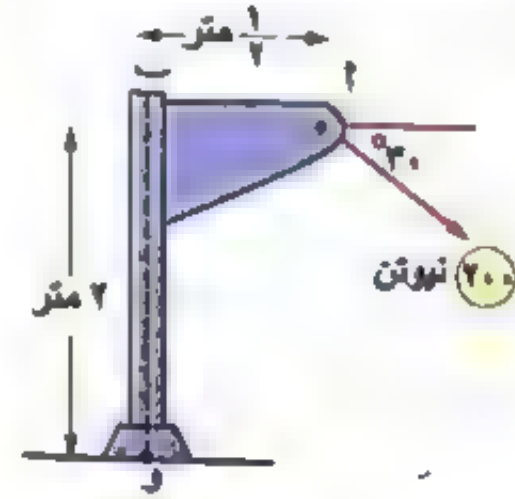
٢



١

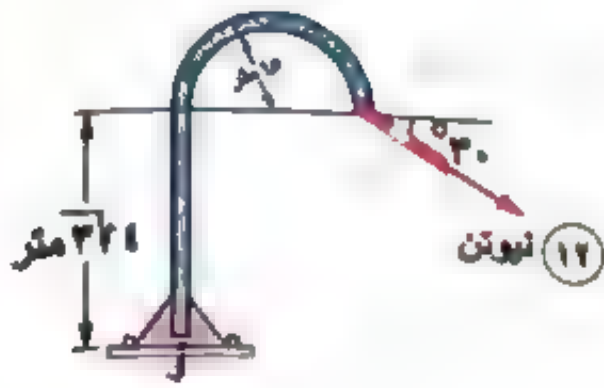


٤

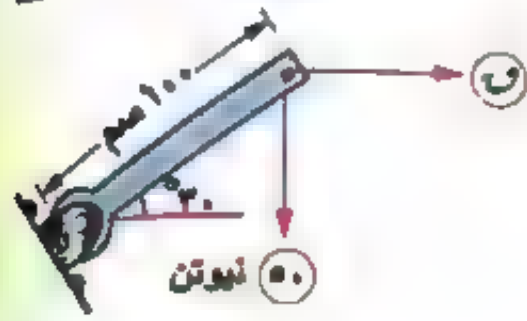


٣

٦



٥



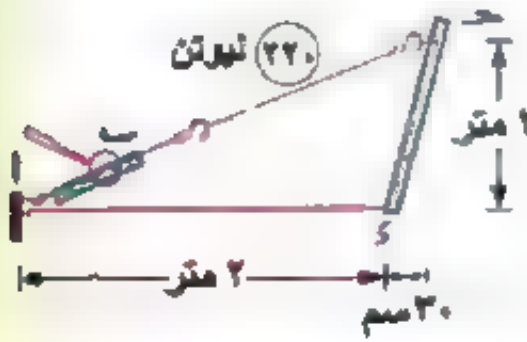
٤ إذا كان عزم القوة \vec{F} حول نقطة O

يساوي عزم القوة 50 نيوتن حول نقطة O

فما قيمة \vec{F} ؟

٥٠٠ ٣٢١ نيوتن

٥ في الشكل المقابل :



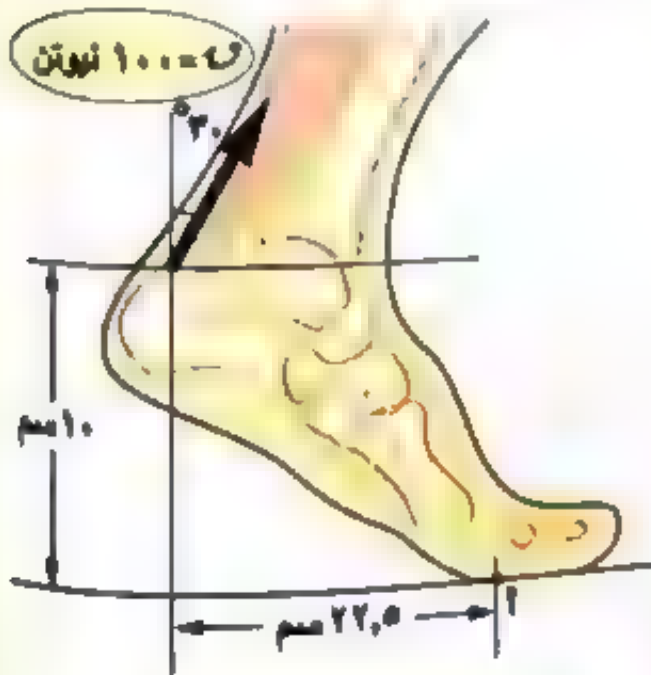
يوضح شداد \vec{F} يؤثر على عمود مائل AB

أوجد معيار عزم قوة الشد

بالنسبة للنقطة O

١٧٥.٤ نيوتن . م

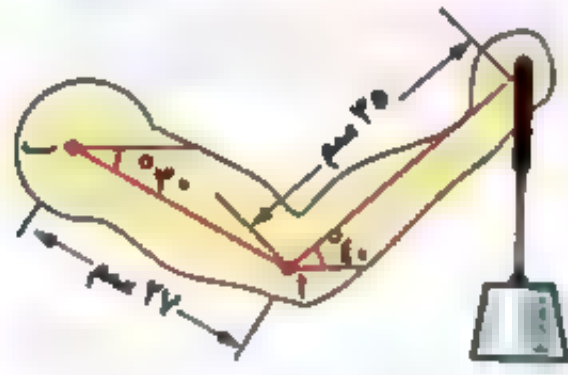
٦ في الشكل المقابل :



أوجد القياس الجبري لعزم القوة \vec{F}

حول النقطة (١)

٢٤٤٨.٥٦ نيوتن . سم



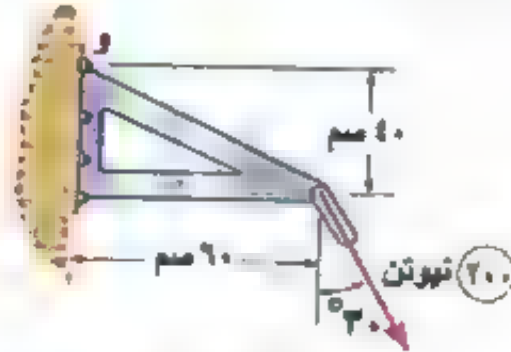
«١٤٩,٧٧ نيوتن . متر»

٧ الشكل المقابل يمثل شخصاً يحمل بيده ثقلًا. فإذا كان معيار عزم الثقل حول نقطة ؟ يساوي ٨٠ نيوتن . متر أوجد معيار عزم الثقل حول نقطة ب



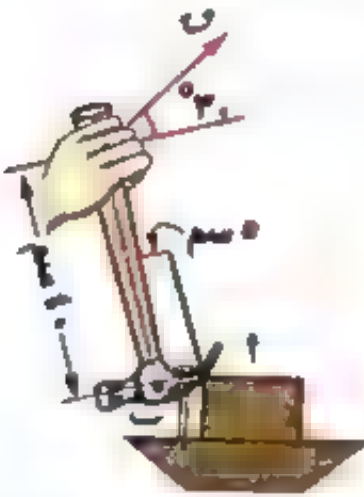
«٢٠٠ نيوتن ، ٩٠°»

٨ إذا كان العزم اللازم لدوران المسمار حول و يساوي ٤٠٠ نيوتن . سم أوجد أقل قيمة للقوة و وقيمة θ التي تحقق دوران المسمار.



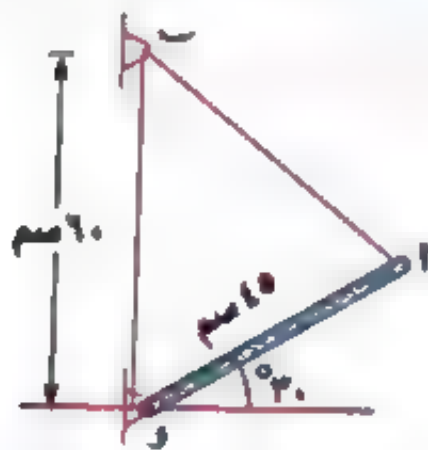
«٦٣٩٢,٢ نيوتن . سم»

٩ في الشكل المقابل : أوجد القياس الجبري لعزم القوة ٢٠٠ نيوتن بالنسبة لنقطة و



«٥,٢٨ نيوتن»

١٠ الشكل المقابل يوضح القوة و اللازمة لنزع مسمار عند ب إذا كان معيار عزم القوة حول نقطة ؟ اللازمة لنزع المسمار يساوي ٢٠٠ نيوتن . سم أوجد معيار القوة و



«٦٤٨٥,١٩ نيوتن . سم»

١١ في الشكل المقابل : الشد في الخيط أ ب مقداره ١٥٠ نيوتن. أوجد عزم قوة الشد بالنسبة للنقطة و

مسائل متنوعة

ثالثاً

ملاحظة : « سوف نرسم جميع الأشكال الهندسية الغير المرسومة بحيث تكون رؤوسها مرتبة في اتجاه دوران عقارب الساعة ما لم يذكر خلاف ذلك »

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



١ في الشكل المقابل :

ΔABC قائم الزاوية في C ، أثرت القوى التي قياساتها ٨ ، ٤ ، ٥ نيوتن في A ، B ، C على التوالي

فإن مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة C = نيوتن. سم.

- (أ) ٣٠ (ب) ٢٠- (ج) ٢٠ (د) ٢٨.٤

٢ ABC مستطيل فيه : $AB = 9$ سم ، $BC = 12$ سم ، أثرت القوى التي مقاديرها

٢ ، ٤ ، ٥ ، ٤ ، ١٠ نيوتن في A ، B ، C ، D ، E ، F على الترتيب فإن مجموع عزوم هذه القوى بالنسبة للنقطة B تساوى نيوتن. سم.

- (أ) ٩٦ (ب) ٦٦ (ج) ٨٤ (د) ٢٤

٣ في الشكل المقابل :

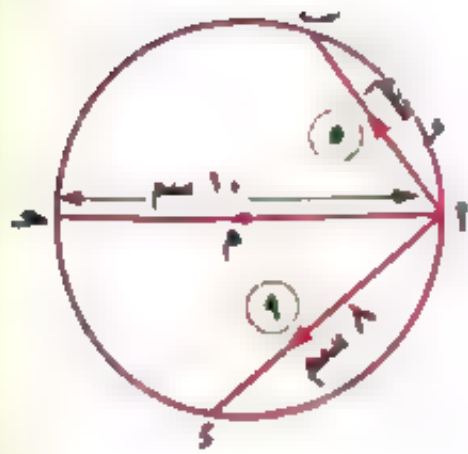
قرص مستدير قطره AC طوله ١٠ سم

، $AB = 6$ سم ، $BC = 8$ سم

أثرت قوتان مقداراهما ٥ ، ٩ نيوتن

في A ، B على الترتيب فإن :

$M =$ نيوتن. سم.

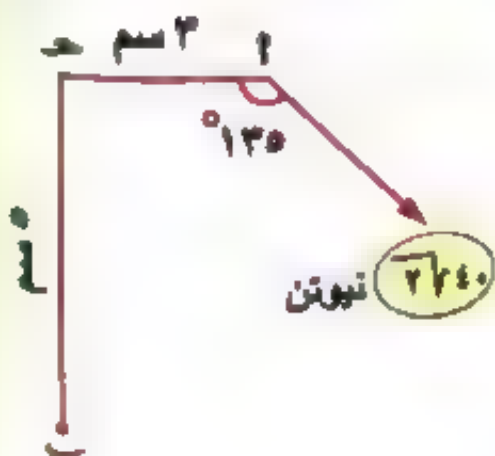


- (أ) ٧- (ب) ١٤- (ج) ١٤ (د) ٤٧

٤ في الشكل المقابل :

معيان عزم القوة $P = 40\sqrt{2}$ نيوتن

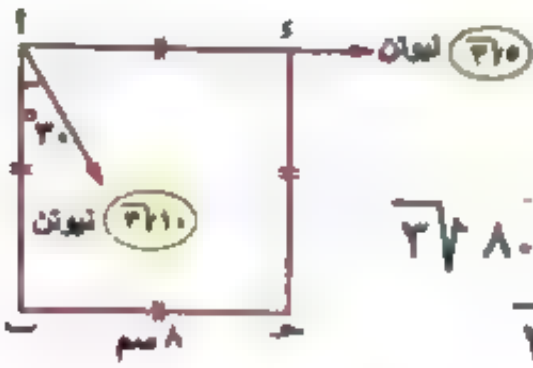
حول النقطة B يساوى نيوتن. سم.



- (أ) ٢٢٠ (ب) $2\sqrt{2} 200$

- (ج) $2\sqrt{2} 120$ (د) $1\sqrt{2} 80$

٥ في الشكل المقابل :

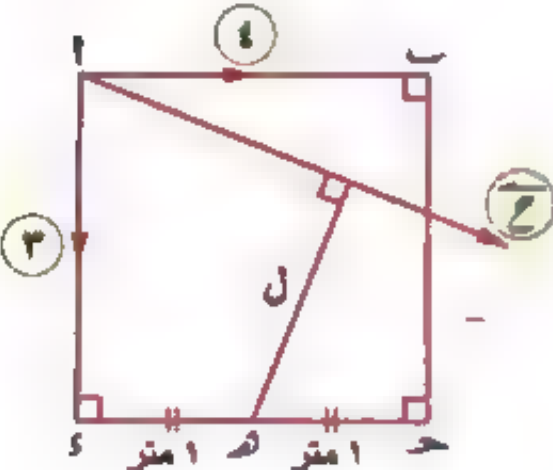


مجموع عزوم القوى حول
النقطة ح = نيوتن سم.

(ب) $3\sqrt{2} \times 80 - 120$
(د) $3\sqrt{2} \times 120$

(أ) $3\sqrt{2} \times 40$
(ج) $3\sqrt{2} \times 80$

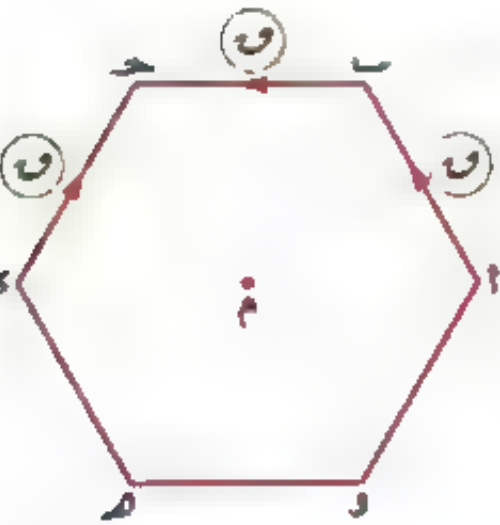
٦ (دور اول ٢٠١٩) في الشكل المقابل :



أ ب ح د مربع طول ضلعه ٢ متر ، أثرت القوتان
٢ ، ٤ ث كجم في أ ب ، أ ب على الترتيب
فإذا كانت محصلتهما ح ، ل طول العمود المرسوم
من ح على خط عمل ح فإن :

(أ) $ح = ٥$ ث كجم ، $ل = ١,٥$ متر
(ب) $ح = ٥$ ث كجم ، $ل = ١$ متر
(ج) $ح = ٥$ ث كجم ، $ل = \sqrt{2}$ متر
(د) $ح = ٥$ ث كجم ، $ل = ١,٢$ متر

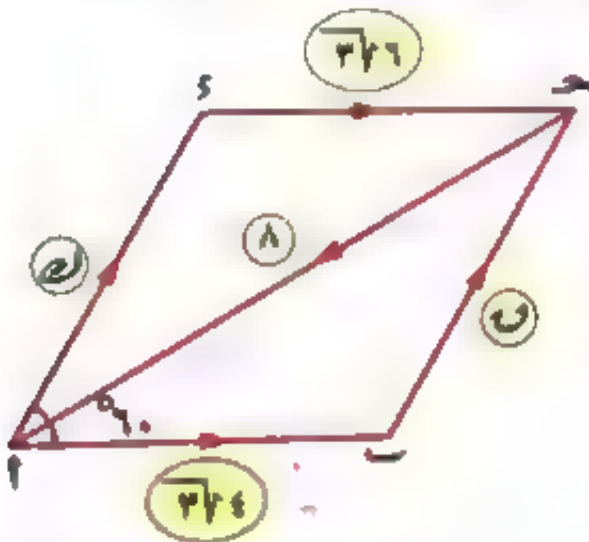
٧ (دور ثا ٢٠١٨) في الشكل المقابل :



أ ب ح د ه و سداسي منتظم طول ضلعه (ل)
إذا أثرت ثلاث قوى متساوية مقدار كل منها (و)
في أ ب ، ب ح ، ح د على الترتيب
فإن مجموع عزم هذه القوى حول م (مركز السداسي)
يساوي وحدة عزم.

(أ) $\frac{3\sqrt{3}}{2} و$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{3} و$ (ج) $\frac{3\sqrt{3}}{4} و$ (د) $\frac{3\sqrt{3}}{2} و$

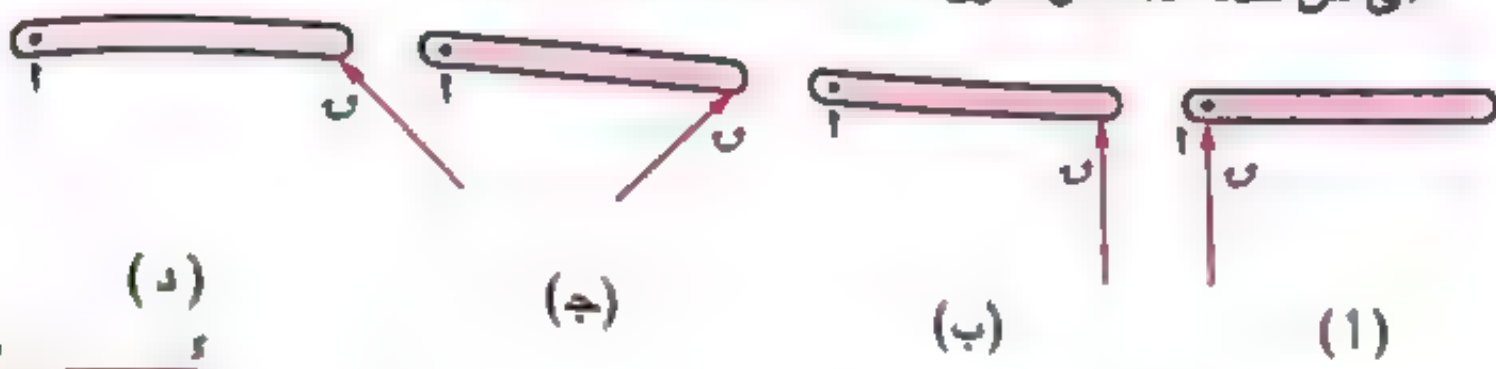
٨ في الشكل المقابل :



أ ب ح د معين طول ضلعه ل سم ، $و = (١ د) = ٦٠^\circ$
أثرت القوى $4\sqrt{2}$ ، $و$ ، $6\sqrt{2}$ ، ٨ نيوتن في
أ ب ، ب ح ، ح د ، د أ ، أ ب ، ب ح
وكان ج م = صفر فإن : نيوتن.

(أ) $3\sqrt{2} \times 2$ (ب) $3\sqrt{2} \times 4$ (ج) $3\sqrt{2} \times 5$ (د) $3\sqrt{2} \times 6$

٩ الأشكال التالية تمثل باب متصل بمفصل عند A أثرت عليه قوة \vec{Q} أي من هذه الأشكال تكون القوة \vec{Q} لها أكبر عزم حول A ؟

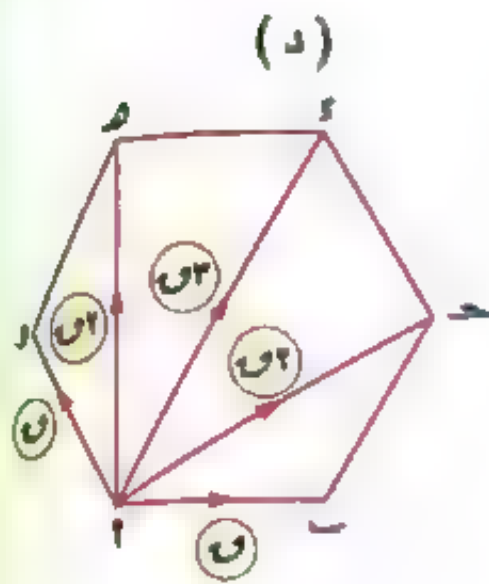


١٠ إذا كان مجموع عزوم القوى المؤثرة

في الشكل السداسي المنتظم المقابل

ينعدم حول نقطة في المستوى مثل h

فإن : $\exists h \dots\dots\dots$



(د) $\vec{A} \vec{O}$

(ج) $\vec{A} \vec{M}$

(ب) $\vec{A} \vec{S}$

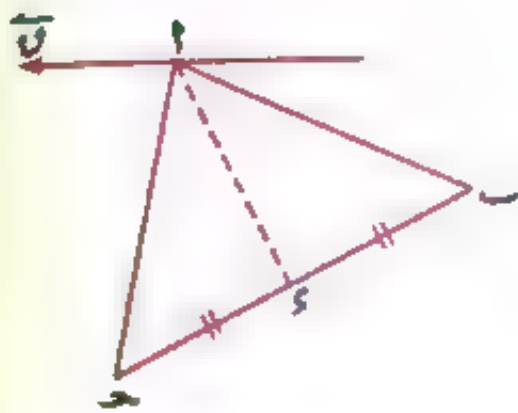
(١) $\vec{A} \vec{H}$

١١ في الشكل المقابل :

إذا أثرت قوة \vec{Q} في مستوى المثلث ABC

وكان $GC = 8$ نيوتن. سم ، $GE = 12$ نيوتن. سم

فإن : $GC = \dots\dots\dots$ نيوتن. سم.



(د) ٤٠

(ج) ٢٠

(ب) ١٠

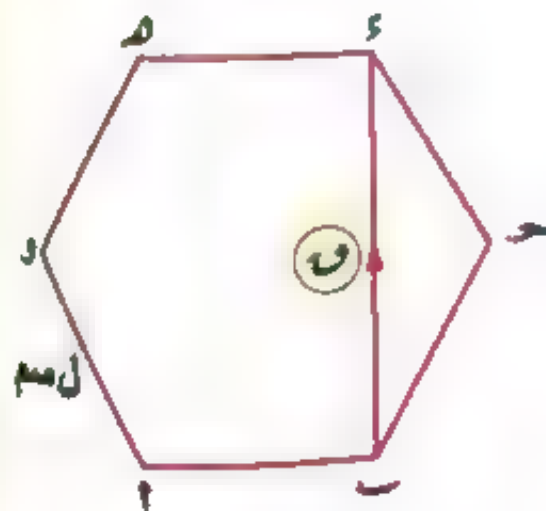
(١) ٤

١٢ الشكل المقابل يمثل شكل سداسي

منتظم طول ضلعه L سم

أثرت قوة مقدارها Q في اتجاه \vec{S}

فإن : $\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 = \dots\dots\dots$

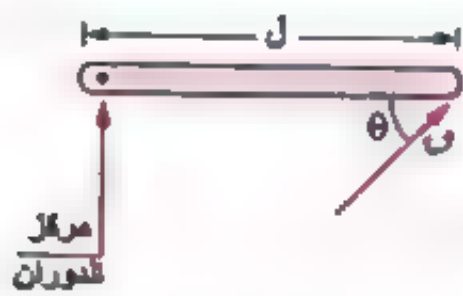


(١) Q

(ب) $Q/2$

(ج) $-Q$

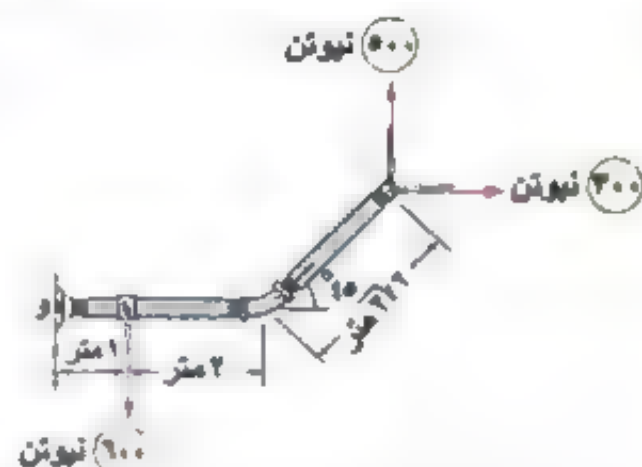
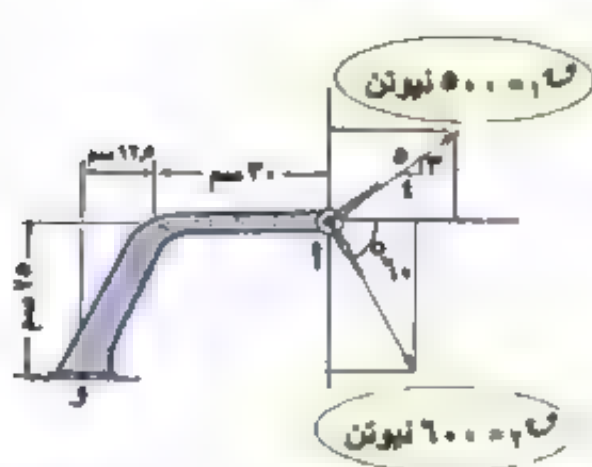
(د) $Q/3$



١٣ **قضييب طوله L يمكنه الدوران بسهولة حول نقطة عند أحد نهايتيه. أثرت على نهايته الأخرى قوة مقدارها F وتميل على القضييب بزاوية قياسها θ فإذا كانت F يجب أن تكون عمودية على القضييب فعلى أي بُعد من مركز الدوران يمكن أن تؤثر F بحيث يكون لها نفس العزم**

(أ) $L \sin \theta$ (ب) $L \cos \theta$ (ج) L (د) $L \tan \theta$

٢ في كل من الأشكال الآتية أوجد القياس الجبري لمجموع عزوم القوى حول النقطة (9) :



٣ **أ ب ح د مربع طول ضلعه ١٠ سم . أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٨ ، ٥ ، ٢ نيوتن في اتجاهات أ ب ، ب ح ، ح د ، د أ على الترتيب.**

أوجد مجموع عزوم القوى :

(١) بالنسبة للنقطة أ

(٢) بالنسبة للنقطة ب

(٣) بالنسبة لمركز المربع.

(٤) بالنسبة للنقطة هـ حيث هـ منتصف ب ح

« ١٢٠- ، ٢٠- ، ٨٠- ، ٢٠- نيوتن.سم »

٤ **أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه ٢٠ سم ، تؤثر القوى ١٠٠ ، ٢٠٠ ، ٣٠٠ نيوتن في أ ب ، ب ح ، ح د على الترتيب.**

أوجد المجموع الجبري لعزوم هذه القوى :

(١) حول نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث.

(٢) حول منتصف ب ح

« صفر ، ١٠٠٠ ، ٣١٢ نيوتن.سم »

الوحدة 2

١. ا ب ح د معين طول ضلعه ١٢ سم ، و (د ا) = ٦٠° ، أثرت القوى ١١ ، ٦ ، ٥ ، ٧ نيوتن في ب ، ا ، ب ح د ، ح د ، ح د ، ح د على الترتيب. أوجد المجموع الجبري لعزوم هذه القوى :

١ حول ا

٢ حول م نقطة تقاطع قطري المعين.

٣٦٠ ، ٣٠ نيوتن. سم.

٢. ا ب ح د ه و سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٣ ، ٧ ، ٤ ، ٢ نيوتن في ا ب ، ح ب ، ح د ، ه د على الترتيب. أوجد مجموع عزوم هذه القوى حول الرأس (و)

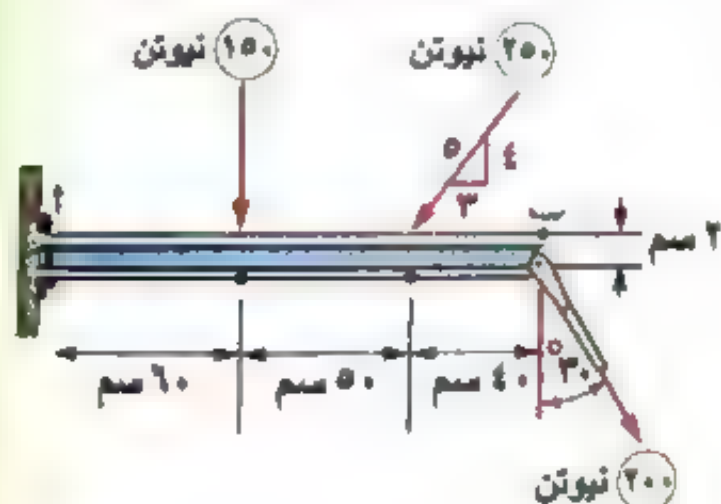
٢٥١ نيوتن. سم.

٧ في الشكل المقابل :



أثبت أن محصلة القوتين ١٠٠ نيوتن ، ٢٨٠ نيوتن تمر بالنقطة ح

٨ في الشكل المقابل :

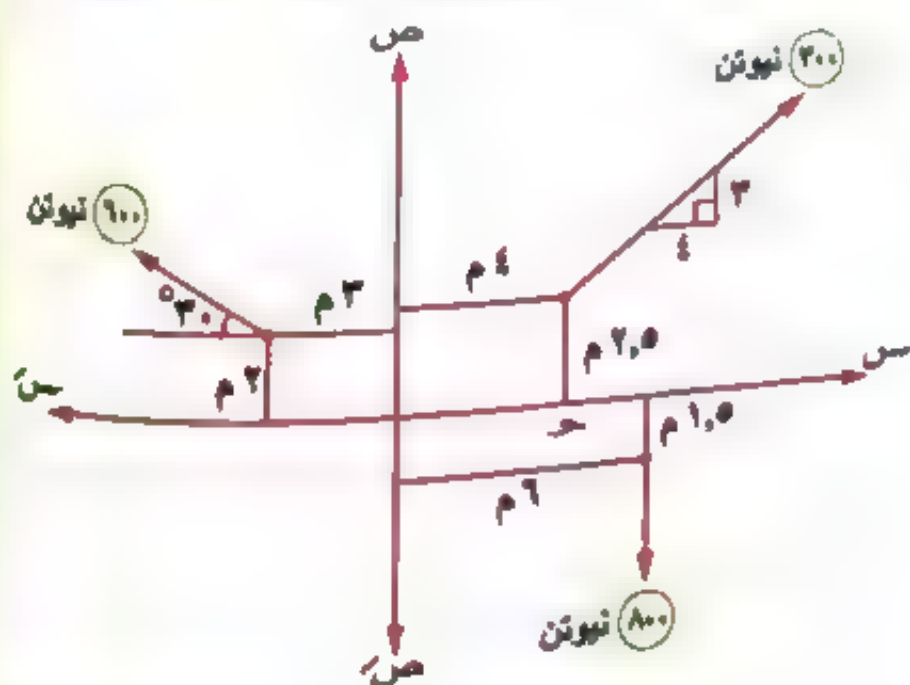


ثلاث قوى تؤثر في قضيب أوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة لكل من النقطتين : ا ، ب

٨- ٥٦٧٨٠ ، ٢١٧٠٠ نيوتن. سم.

٩ في الشكل المقابل :

أوجد القياس الجبري لمجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة ح



٨- ٢٢٦٠ نيوتن. م



١٥ **تؤثر القوة \vec{F} في المستوى $ص-س$ على**

المثلث $أ-ب-ج$ فإذا كان القياس الجبري لعزم

\vec{F} بالنسبة للنقطة $و$ يساوي ٨٤ نيوتن. م

، القياس الجبري لعزمها بالنسبة للنقطة $أ$

يساوي - ١٠٠ نيوتن. م ، والقياس الجبري

لعزمها بالنسبة للنقطة $ب$ يساوي صفر.

عَيِّن \vec{F}

٥٤ نيوتن ، تميل على $وس$ بزاوية قياس ١٤٨° .

١٦ (دور اول ٢٠١١) **أ-ب-ج** مثلث متساوي الساقين فيه : $\vec{F} = (٢٠٠)$ تؤثر قوى مقاديرها

٤ ، ٤ ، ٤ ث. كجم في $أ-ب$ ، $أ-ج$ ، $ب-ج$ على الترتيب. أثبت باستخدام العزوم

أن خط عمل المحصلة يمر بمنتصف $ب-ج$ ويوازي $أ-ج$

١٧ **أ-ب-ج** مربع طول ضلعه ٦ سم ، $\vec{F} \in ب-ج$ حيث : $ب = ١$ سم ، أثرت قوى

مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ نيوتن في $أ-ب$ ، $ب-ج$ ، $ج-د$ ، $د-أ$ ، $أ-ج$ على الترتيب

إذا كان خط عمل المحصلة يمر بالنقطة $هـ$ أوجد قيمة : \vec{F}

١٨ **أ-ب-ج** مستطيل فيه : $أ-ب = ٦$ سم ، $ب-ج = ٨$ سم أثرت القوى ٥ ، ٨ ، ٦ ،

١٠ ثقل جم في $أ-ب$ ، $ب-ج$ ، $ج-د$ ، $د-أ$ على الترتيب.

أوجد نقطة $و \in ب-ج$ بحيث يكون مجموع عزوم القوى حول $و = ٤٥$ ثقل جم. سم

في اتجاه $أ-ب-ج$ $و \in ب-ج$ ، $ب = ٣$ سم

١٩ **أ-ب-ج** مستطيل فيه : $أ-ب = ٨$ سم ، $ب-ج = ١٢$ سم ، القوى ١٦ ، ١٤ ، ١٠

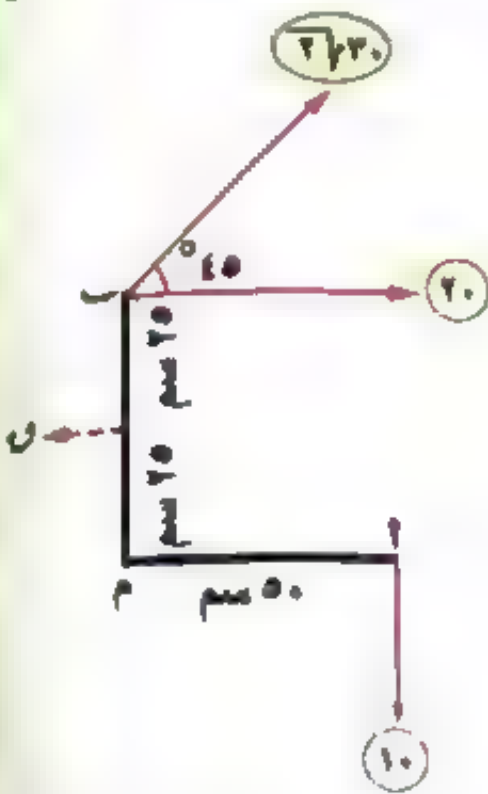
، ٨ ث. جم تؤثر في $أ-ب$ ، $ب-ج$ ، $ج-د$ ، $د-أ$ على الترتيب ، فإذا كان المجموع الجبري

لعزوم هذه القوى حول كل من $ح$ ومركز المستطيل يساوي صفرًا.

أوجد : $و$ ، $هـ$

١٠ ، ٢٤ ث. جم

١٥ **١** \vec{a} \vec{b} شبه منحرف قائم الزاوية في \vec{c} ، $\vec{a} // \vec{b}$ ، $\vec{a} = 8$ سم ، $\vec{b} = 10$ سم ، $\vec{c} = 9$ سم ، أثرت قوى مقاديرها 10 ، 44 ، 68 ث.جم في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب إذا كان خط عمل محصلة مجموعة القوى يمر بنقطة \vec{d} فاوجد قيمة \vec{d} .



١٢٦ ث.جم.

١٦ **١** ثني قضيب \vec{AB} طوله 100 سم عند نقطة منتصفه \vec{M} بحيث أصبح \vec{AM} عمودياً على \vec{MB} أثرت القوى 10 ، 20 ، 30 ث.جم عند الطرفين \vec{A} ، \vec{B} كما هو مبين بالشكل المقابل. ما هو مقدار القوة \vec{F} التي يجب أن تؤثر عند منتصف \vec{MB} وفي الاتجاه الموضح بالشكل بحيث ينعقد المجموع الجبري لعزوم القوى حول نقطة \vec{M} ؟



٦٠ نيوتن.

١٧ **١** في الشكل المقابل :

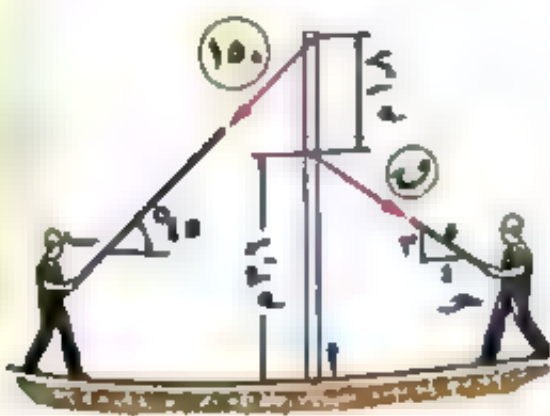
\vec{AB} تمثل رافعة لرفع البضائع إذا كان الشد في الخيط يساوي 140 نيوتن ، وزن الصندوق 125 نيوتن. أوجد مجموع عزمي القوتين بالنسبة للنقطة \vec{B}



٦٠ نيوتن.

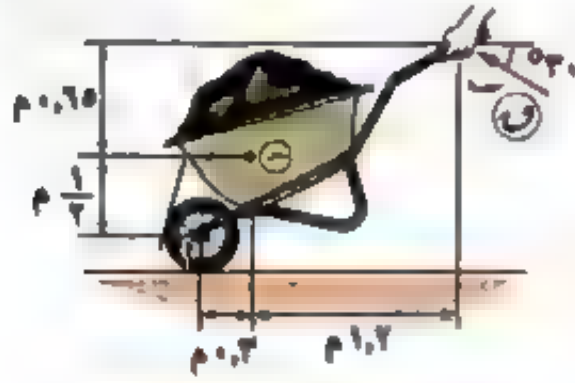
١٨ **١** في الشكل المقابل :

رجل عند الموضع \vec{B} يشد الحبل بقوة مقدارها 150 نيوتن فما هو مقدار القوة \vec{F} التي يجب أن يشد بها رجل آخر الحبل عند الموضع \vec{C} بحيث يحفظ العمود من الدوران. أي يكون مجموع عزمي الشدين حول \vec{A} = صفر



١٩٨,٩ نيوتن.

١٩ في الشكل المقابل :



إذا كان مركز ثقل عجلة يدوية ومحتوياتها هو النقطة (ح) وكان $W = 100$ ث.كجم وكان مجموع عزمى قوة الوزن والقوة Q حول النقطة (أ) يساوى صفر.

احسب وزن العربة اليدوية بمحتوياتها.

« ٥٨٢ ث.كجم »

٢٠ أ ب ح مثلث قائم الزاوية في ب فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ح = ٨ سم أثرت قوة

Q في مستوى المثلث بحيث كان $J = 60$ نيوتن. سم ، $J = 60$ نيوتن. سم. أوجد مقدار Q وعين خط عملها.

« ١٥ نيوتن »

٢١ أ ب ح د مستطيل فيه : أ ب = ١٢ سم ، ب ح = ١٦ سم أثرت قوة Q في مستوى

المستطيل ، فإذا كان عزم Q حول ب = عزم Q حول د = ٢٤٠ نيوتن. سم ، عزم Q حول أ = ٢٤٠ نيوتن. سم فعين مقدار واتجاه وخط عمل Q « ٥٠ نيوتن »

٢٢ أ ب ح د مستطيل فيه : أ ب = ٤.٥ سم ، ب ح = ٦ سم ، أثرت مجموعة من

القوى المستوية في مستوى المستطيل فإذا كان المجموع الجبرى لعزوم هذه القوى حول كل من أ ، ح يساوى ٧٢٠ ثقل كجم. سم ، المجموع الجبرى لعزومها حول ب يساوى ٢٤٠ - ثقل كجم. سم فعين مقدار واتجاه وخط عمل محصلة هذه القوى.

« $J = 266 \frac{2}{3}$ ثقل كجم ، توازى أ ح ، تقطع ب ح في د حيث ب د = ١.٥ سم »

٢٣ النقط أ (٧ ، ٢) ، ب (١٠ ، ٢) ، ح (٨ ، ٥) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية

في ب أثرت القوى ١٥ ، ١٤ ، Q ثقل كجم فى الأضلاع أ ب ، ب ح ، ح أ على الترتيب ، فإذا كانت المحصلة تساوى ٦ ثقل كجم وتعمل فى الاتجاه الموجب لمحور السينات فأوجد باستخدام العزوم إحداثى النقطة ح ومقدار Q « (١٠ ، ٢) ، ٢٥ ث.كجم »

٢٤ (١٩٩٢) أ ب ح د شبه منحرف قائم الزاوية عند كل من أ ، د فيه :

$$\overline{AD} = 40 \text{ سم} , \overline{AB} = 70 \text{ سم} , \overline{BC} = 10 \text{ سم} , \overline{CD} = 20 \text{ سم}$$

بحيث : أ = ٤٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٣٥ ثجم

في ح أ ، ح ب ، ح د ، ح د على الترتيب وكان معيار محصلة هذه القوى ٥٠ ثجم

أوجد د ومعيار عزم محصلة المجموعة بالنسبة لنقطة أ ١٠٠ ثجم ، ٤٠٠ ثجم سم

مسائل نفس مستويات علما من التفكير

٢٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت معادلة خط عمل القوة \vec{F} هي $\vec{r} = (2, 3) + (4, 5)$

فإن عزم القوة \vec{F} بالنسبة للنقطة أ (١٠ ، ١٢) هو

- (أ) صفر (ب) ٢ (ج) ٢- (د) ٤-

٢ تؤثر القوة $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ في نقطة أ (٢ ، ٠) وكانت $\vec{r} = (-4, -2)$

وكان طول العمود المرسوم من النقطة ب على خط عمل \vec{F} يساوي طول العمود

المرسوم من النقطة ح على خط عمل \vec{F} فإن : $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \dots$

- (أ) $2\vec{i}$ (ب) $\frac{1}{2}\vec{j}$ (ج) $2\vec{j}$ (د) صفر

٣ في الشكل المقابل :

مقدار عزم القوة ٢٠ نيوتن حول النقطة

.....

(أ) [١٥ ، ٠]

(ب) [٢٠ ، ٠]

(ج) [٣٠ ، ٠]

(د) [٣٠٠ ، ٠]

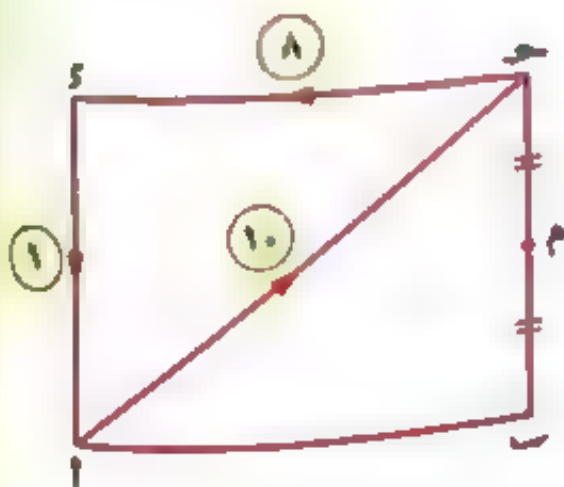
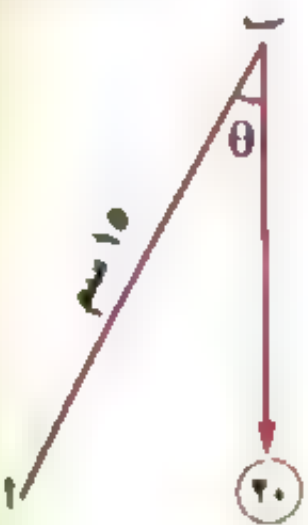
٤ في الشكل المقابل :

أ ب ح د مستطيل فيه : أ = ١٦ سم

ب = ١٢ سم ، م منتصف ح د

، أثرت القوى التي مقاديرها ٦ ، ١٠ ، ٨ نيوتن

في الاتجاهات أ ، ح ، د على الترتيب



كما أثرت قوة مقدارها ٥ نيوتن عند م فإذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول ب يساوي ١١١ وحدة عزم فإن قياس الزاوية الحادة التي تميل بها القوة التي مقدارها ٥ على \overline{BC} يساوي

- (1) ۳. (ب) ۶. (ج) ۴۵. (د) $\frac{8}{3} - 16$

⑤ إذا كانت : q, b, c ، ونقط تقع على المستقيم l واثرت قوة \vec{F} بحيث $\vec{F} //$ المستقيم l وكان : $F_3 ج ٣ + F_2 ج ٢ = ٣٠$ نيوتن سم.

فإن: $J_3 - J_2 + J_1 = \dots \dots \dots$ نيوتن.سم.

- ٢٤ (ج) ١٨ (د) ١٥ (ب) ١٢ (ا)

⑥ في الشكل المقابل :

٢٠ ح مثلت مرسوم داخل دائرة فيه :

١٩ = ١٠ سم ، ٢٠ = ٢٤ سم

۱۰۲۸ = ۱۰۲۸ سم.

وطول نصف قطرها ١٣ سم أثرت القوى ١٢ ، ٣٠ ، ٢٠ ثقل جرام

في \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} ، \overrightarrow{CB} على الترتيب فإن المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول مركز الدائرة = وحدة عزم.

- ٢٥٤ (د) ٦٦ (ج) ١٢٢ (ب) ٢٢ (ا)

(۷) إذا أثرت قوة \vec{F} في مستوى Δ \uparrow \vec{r} وكان $\vec{J}_M = 2 \vec{J}_C$ وكانت \vec{r} منتصف \overline{AB}

فان : ج - ج - ج = ج ج

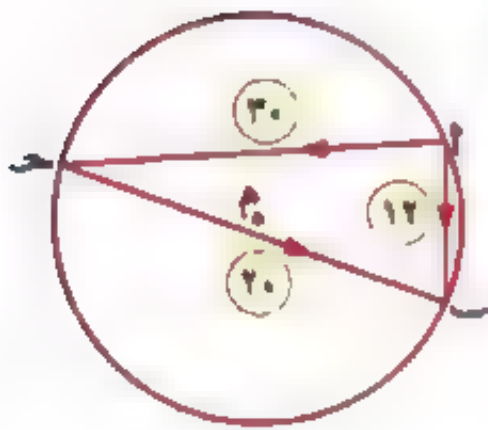
- $$2 \text{ (د)} \qquad \frac{2}{3} \text{ (ج)} \qquad \frac{2}{3} \text{ (ب)} \qquad \frac{1}{3} \text{ (ا)}$$

Ⓐ إذا أثرت قوة \vec{Q} في مستوى المستطيل $ABCD$ وكانت M هي نقطة تقاطع قطريه

وكان ج₁ = ٢٨ نيوتن متر ، ج_٢ = ٢٤ نيوتن متر

فان : ج = = نيوتن . متر .

- ٧٦ (د) ٧٠ (ج) ١٠ (ب) ٤- (١)



٩ إذا كانت \vec{Q} قوة في مستوى متوازي الاضلاع ABC وكان $\vec{Q} = 18$ وحدة عزم

، $\vec{Q} = 22$ وحدة عزم. فإن : $\vec{Q} = \dots$ وحدة عزم.

- (أ) 14 (ب) 82 (ج) 46 (د) 14

١٠ إذا أثرت قوة \vec{Q} في مستوى ΔABC وكانت $\vec{Q} \perp \overline{BC}$ حيث $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{5}$

وكان : $\vec{Q} = 10$ نيوتن.سم ، $\vec{Q} = 6$ نيوتن.سم.

فإن : $\vec{Q} = \dots$ نيوتن.سم.

- (أ) 16 (ب) 14 (ج) 14- (د) 40-

١١ ABC مثلث قائم الزاوية في B ، $AB = 2$ سم ، $BC = 4$ سم ، \vec{Q} قوة تؤثر

في مستوى المثلث وتوازي \overline{AC} فإذا كان : $\vec{Q} = 15$ نيوتن

فإن : $\|\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2\| = \dots$ نيوتن.سم.

- (أ) 36 (ب) 12 (ج) 45 (د) 60

١٢ في الشكل المقابل :

A, B, C على استقامة واحدة

فإذا كان : $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 = \vec{Q}_3$

فإن : $A : B : C = \dots$

- (أ) 1 : 2 (ب) 2 : 2 (ج) 2 : 4 (د) 1 : 2

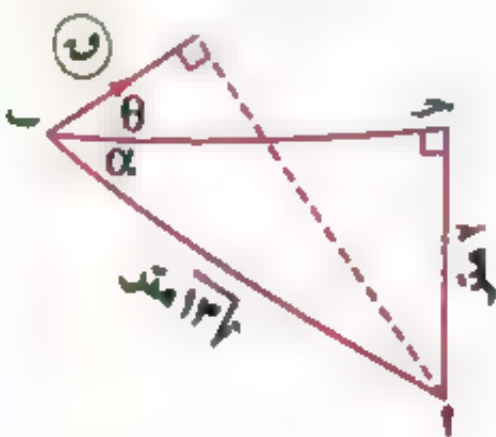


٢٦ في الشكل المقابل :

إذا كانت القوة $\vec{Q} = 100$ نيوتن ، $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

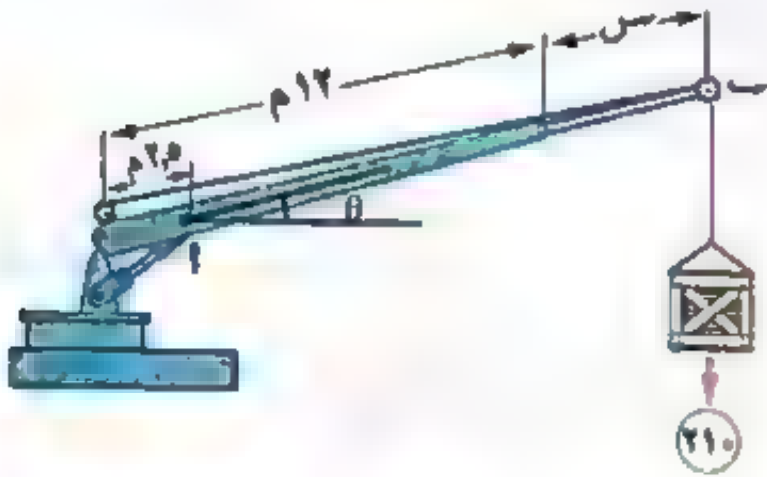
أوجد قياس الزاوية θ التي تجعل معيار عزم القوة \vec{Q}

حول A أصغر ما يمكن.

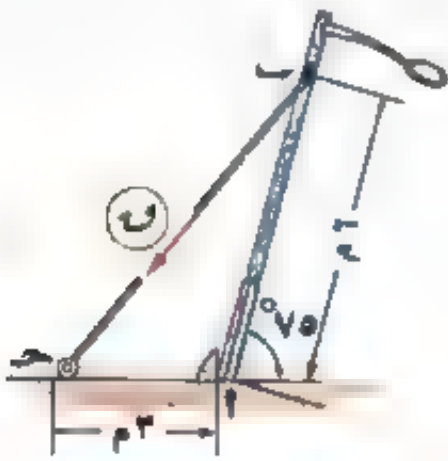


١٤٦٦٩٠

- ٢٧) \vec{AB} مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، \vec{C} منتصف \vec{AB} رسم \vec{CD} \perp \vec{AB} \vec{CD} يقطعه في \vec{D} ، أثرت القوى \vec{P} ، \vec{Q} ، \vec{R} في أضلاع المثلث فإذا كانت محصلة هذه القوى تساوي ١٢ $\sqrt{3}$ نيوتن وخط عملها \vec{CD} أوجد هذه القوى مقداراً واتجهاً.
- «١٨ ، ٦ ، ٦ نيوتن»



- ٢٨) الشكل المقابل يوضح رافعة يمكن تعديل زاوية ميلها θ حيث $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ والجزء الأمامي منها يتمدد بطول s متر حيث $0 \leq s \leq 4$ معلق فيها صندوق كتلته ٢١٠ كجم أوجد معيار العزم المتولد عند نقطة P كدالة في θ ، s ، أوجد كذلك قيم كل من θ ، s عندما يأخذ العزم عند P أكبر قيمة له وأوجد هذه القيمة.
- «٢٨٣٥٠ ث.كجم.متر»



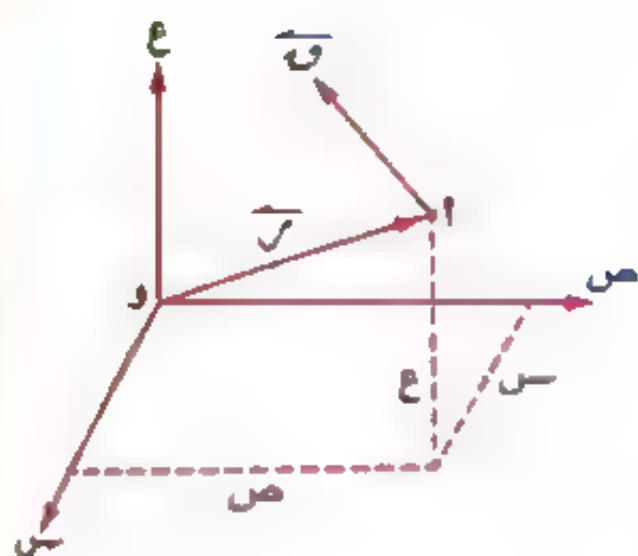
- ٢٩) في الشكل المقابل : أوجد مقدار القوة \vec{P} التي يجب أن تؤثر في الكابل لتعطي عزم حول نقطة P مقداره ١٥٠٠ نيوتن.متر
- «٦٣٦ نيوتن»



عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة لنقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد

2

عزم قوة حول نقطة في الفراغ



إذا كانت القوة $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ تؤثر في النقطة 1 (x, y, z) التي متجه موضعها بالنسبة للنقطة (و) هو $\vec{r} = (x, y, z)$

فإن عزم القوة \vec{F} حول النقطة (و) هو $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$

ومن تعريف الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفراغ

$$\vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\vec{e}_x + (zF_x - xF_z)\vec{e}_y + (xF_y - yF_x)\vec{e}_z$$

ملاحظتان

① طول العمود الساقط من (و) على خط عمل \vec{F} $= \frac{\|\vec{M}_O\|}{\|\vec{F}\|}$

② إذا كانت القوة \vec{F} تؤثر في نقطة 1 فإن عزم القوة \vec{F} حول نقطة 2 $= \vec{r}_{12} \times \vec{F}$

مركبات عزم القوة حول المحاور S, V, E

يمكن كتابة متجه العزم \vec{E} بدلالة الإحداثيات المتجهة كالتالي :

$$\vec{E} = E_S \vec{S} + E_V \vec{V} + E_E \vec{E}$$

حيث : E_S, E_V, E_E هي «مركبات عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل» وهي نفسها «مركبات عزم القوة حول المحاور S, V, E على الترتيب».

أى أن :

$$E_S = E_V \cos \alpha - E_E \sin \alpha \quad \text{«مركبة العزم فى اتجاه محور } S\text{»}$$

$$E_V = E_S \sin \alpha + E_E \cos \alpha \quad \text{«مركبة العزم فى اتجاه محور } V\text{»}$$

$$E_E = E_S \sin \alpha - E_V \cos \alpha \quad \text{«مركبة العزم فى اتجاه محور } E\text{»}$$

ملاحظة

ينعدم عزم قوة حول محور فى حالتين :

① إذا اشترك خط عمل القوة مع المحور فى نقطة على الأقل.

② إذا كانت القوة توازى المحور.

ويمكن إيضاح ذلك فيما يلى :

* نلاحظ أن عزم القوة \vec{F} له

٣ مركبات فى اتجاهات $\vec{S}, \vec{V}, \vec{E}$

$\vec{F}_S, \vec{F}_V, \vec{F}_E$ ونجد أن مركبة العزم

فى اتجاه \vec{S} تساوى مجموع

عزوم المركبات $\vec{F}_S, \vec{F}_V, \vec{F}_E$

حول المحور S كالتالى :

* المركبة \vec{F}_S ليس لها عزم دورانى حول محور S لأنها توازى المحور.

* المركبة \vec{F}_V تعمل على الدوران حول محور S فى اتجاه دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $- E_V \times \vec{S}$

* المركبة \vec{F}_E تعمل على الدوران حول محور S فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة فيكون عزمها $E_E \times \vec{S}$

∴ مجموع عزوم المركبات حول محور S يساوى $(E_E \times \vec{S} - E_V \times \vec{S})$

وبالمثل لباقي مركبات العزم فى اتجاه \vec{V}, \vec{E}

مثال ١

تؤثر القوة $\vec{Q} = 2\vec{s} + \vec{v} - \vec{e}$ في النقطة $A = (1, -1, 2)$
أوجد عزم القوة \vec{Q} حول النقطة $B = (3, -2, 1)$
ثم احسب طول العمود الساقط من B على خط عمل القوة \vec{Q}

الحل

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (3, -2, 1) - (1, -1, 2) = (2, -1, -1)$$

$$\vec{Q} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}(1-1) - \vec{v}(2-1) + \vec{s}(-2-1) = -\vec{v} - 3\vec{s}$$

$$\vec{Q} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{s} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}(1-1) - \vec{v}(2-1) + \vec{s}(-2-1) = -\vec{v} - 3\vec{s}$$

$$\text{طول العمود الساقط من } B \text{ على خط عمل القوة } \vec{Q} = \frac{\|\vec{Q} \times \vec{AB}\|}{\|\vec{Q}\|} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$$

مثال ٢

إذا كانت القوة $\vec{Q} = m\vec{s} + k\vec{v} + 2\vec{e}$ تؤثر في نقطة A متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\vec{r} = (2, -3, 5)$ فإذا كانت مركبتا عزم \vec{Q} حول المحورين s ، v هما -19 ، 9 على الترتيب أوجد قيمة كل من m ، k ثم أوجد طول العمود المرسوم من النقطة O على خط عمل \vec{Q} لأقرب جزء من عشرة.

الحل

$$\vec{Q} = (m, k, 2)$$

$$\vec{r} \times \vec{Q} = (5, -2, 2) \times (m, k, 2) = \vec{e}(10-2k) - \vec{v}(10-2m) + \vec{s}(5k-2m)$$

$$\vec{r} \times \vec{Q} = (10-2k)\vec{e} - (10-2m)\vec{v} + (5k-2m)\vec{s}$$

$$-19 = 10-2k \Rightarrow k = 14.5$$

$$9 = -(10-2m) \Rightarrow m = -0.5$$

$$\vec{Q} = (-0.5, 14.5, 2)$$

$$\text{طول العمود} = \frac{\|\vec{r} \times \vec{Q}\|}{\|\vec{Q}\|} = \frac{\sqrt{(-19)^2 + (-9)^2}}{\sqrt{(-0.5)^2 + (14.5)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{212.5}} = \frac{20}{\sqrt{212.5}} \approx 1.35$$

$$\therefore 19 - 2 \times 2 = 15 \quad \therefore 2 = 15$$

$$\therefore \text{مركبة عزم القوة حول محور ص (ع.ص)} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\therefore 2 \times 2 - 15 = 9 \quad \therefore 2 = 9$$

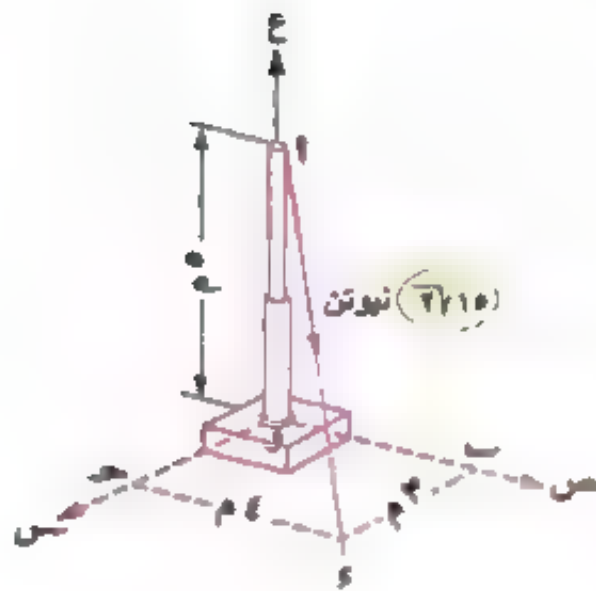
$$\therefore \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 13 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 (2 \times 19 - 2 \times 18) + \vec{e}_2 (0 \times 19 - 2 \times 13) + \vec{e}_3 (0 \times 9 - 2 \times 13)$$

$$\therefore \text{طول العمود} = \frac{\|\vec{r} \times \vec{F}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\sqrt{(2 \times 19 - 2 \times 18)^2 + (0 \times 19 - 2 \times 13)^2 + (0 \times 9 - 2 \times 13)^2}}{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = 5, 2 \text{ وحدة طول.}$$

مثال ٣

في الشكل المقابل :

تؤثر قوة مقدارها $10\sqrt{2}$ نيوتن في نقطة أ
أوجد مقدار عزم القوة بالنسبة لنقطة الأصل و



الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\vec{a} = (0, 0, 0) \quad \vec{b} = (0, 4, 0)$$

$$\vec{c} = (0, 0, 2) \quad \vec{d} = (0, 4, 2)$$

$$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \vec{c} - \vec{d} = (0, -4, 2)$$

$$\therefore \vec{r} \text{ في اتجاه } \vec{a}$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ متجه وحدة في اتجاه } \vec{a}$$

$$\therefore \vec{r} = \frac{\vec{a} \times \vec{F}}{\|\vec{a} \times \vec{F}\|} = \frac{(0, -4, 2) \times (0, 4, 2)}{\sqrt{(0)^2 + (4)^2 + (2)^2}} \times 10\sqrt{2} = \frac{(0, -4, 2) \times (0, 4, 2)}{\sqrt{20}} \times 10\sqrt{2}$$

$$= (10, -12, 9)$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{u} \times \vec{v} = (0, 0, 0) \times (9, 12, -10) = (10, -12, 9)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{u} \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -12 & 9 \end{vmatrix} = \vec{e} \cdot 40 + \vec{v} \cdot 60 = 100 + 60\sqrt{2}$$

$$\therefore \|\vec{r}\| = \sqrt{(10)^2 + (-12)^2 + 9^2} = 17 \text{ نيوتن متر.}$$

مثال 4

في الشكل المقابل :

قوة مقدارها 60 نيوتن تؤثر في القطر \overline{AB} في متوازي المستطيلات الذي أبعاده 6 ، 8 ، 24 مترًا كما بالشكل. أوجد متجه عزم القوة \vec{r} حول النقطة O

الحل

من هندسة الشكل :

$$\vec{A} = (6, 0, 0), \vec{B} = (0, 24, 8), \vec{C} = (0, 24, 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (-6, 24, 8)$$

$$\vec{r} = \vec{C} - \vec{A} = (-6, 24, 0)$$

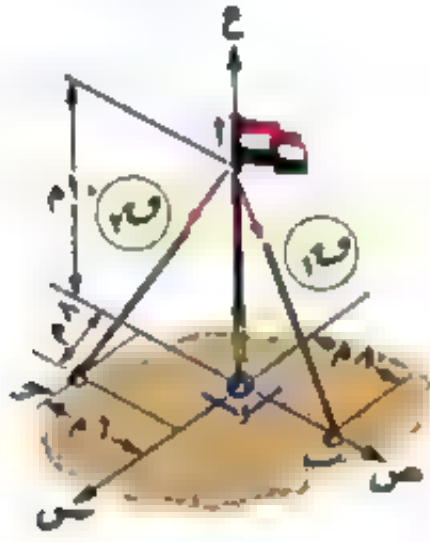
$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = \text{متجه وحدة في اتجاه } \overline{AB}$$

$$= \frac{(-6, 24, 8)}{\sqrt{(-6)^2 + 24^2 + 8^2}} \times 60 = \frac{\overline{AB}}{\|\overline{AB}\|} \times 60 = (10, -12, 9)$$

$$\therefore \vec{r} \times \vec{v} = (10, -12, 9)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e} & \vec{v} & \vec{r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & -12 & 9 \end{vmatrix} = \vec{e} \cdot 480 + \vec{v} \cdot 120 = 100 + 60\sqrt{2}$$

مثال ٥



في الشكل المقابل :

تؤثر القوى $P = 4\sqrt{2}$ نيوتن

، $Q = 2\sqrt{5}$ نيوتن

في اتجاهات \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{AC} على الترتيب

أوجد مجموع عزوم القوى حول نقطة الأصل (و)

الحل

من هندسة الشكل نجد أن :

$$A = (10, 0, 0) \text{ ، } B = (0, 8, 0)$$

$$C = (0, 6, 8)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (-10, 8, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{A} = (-10, 6, 8)$$

$$\therefore \overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \times 4\sqrt{2} = \frac{(-10, 8, 0)}{\sqrt{(-10)^2 + 8^2 + 0^2}} \times 4\sqrt{2} = (-4, 3, 0)$$

$$\overrightarrow{Q} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} \times 2\sqrt{5} = \frac{(-10, 6, 8)}{\sqrt{(-10)^2 + 6^2 + 8^2}} \times 2\sqrt{5} = (-4, 3, 4)$$

$$\therefore \overrightarrow{R} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} = (-4, 3, 4) + (-4, 3, 0) = (-8, 6, 4) \text{ وتؤثر في نقطة } A$$

\therefore مجموع عزوم القوى حول نقطة الأصل (و) = عزم المحصلة حول (و)

$$= \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{OA} = (-8, 6, 4) \times (10, 0, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -8 & 6 & 4 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}(6 \cdot 0 - 4 \cdot 0) - \overrightarrow{j}(-8 \cdot 0 - 4 \cdot 10) + \overrightarrow{k}(-8 \cdot 0 - 6 \cdot 10) = 0\overrightarrow{i} + 40\overrightarrow{j} - 60\overrightarrow{k}$$

الوحدة 2

مثال ٦

في الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة \vec{F} = ٢٠٠ نيوتن حول كل

من محور \vec{S} ، \vec{V} ، \vec{E}

الحل

بتحليل متجه القوة \vec{F} نجد أن :

$$\vec{F}_S = 200 \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \times 200 = -100$$

$$\vec{F}_V = 200 \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \times 200 = 100$$

$$\vec{F}_E = 200 \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 200 = 100\sqrt{2}$$

$$\therefore \vec{F} = (-100, 100, 100\sqrt{2})$$

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\vec{r} = (0, 20, 0)$$

$$\therefore \vec{M}_O = \begin{vmatrix} \vec{E} & \vec{V} & \vec{S} \\ 0 & 20 & 0 \\ 100\sqrt{2} & 100 & -100 \end{vmatrix} = \vec{E} 20 + \vec{V} 20 - \vec{S} (20 - 20\sqrt{2})$$

\therefore عزم القوة حول محور \vec{S} = $(20 - 20\sqrt{2})$ نيوتن.متر

عزم القوة حول محور \vec{V} = ٢٥ نيوتن.متر.

عزم القوة حول محور \vec{E} = ٣٠ نيوتن.متر.

مثال ٧

أ ب ح د شبه منحرف قائم الزاوية في ب

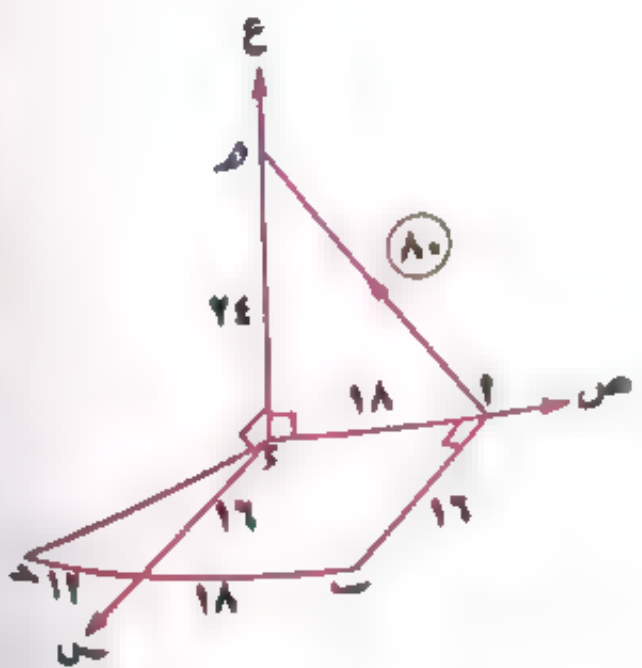
$\vec{AD} \parallel \vec{BC}$ ، $\vec{AB} = 16$ سم

$\vec{BC} = 20$ سم ، $\vec{AD} = 18$ سم

ثم رسم $\vec{DE} \perp$ مستوى شبه المنحرف حيث $\vec{DE} = 24$ سم

أثرت قوة مقدارها ٨٠ نيوتن في \vec{AD}

أوجد مقدار عزم القوة حول النقطة ب



١٢٠

من هندسة الشكل نجد أن :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (0, 18, 0) \quad , \quad \vec{b} = (0, 18, 16) \quad , \quad \vec{d} = (24, 0, 0) \\ \therefore \vec{ad} &= \vec{a} - \vec{d} = (24, 18, 0) \\ \vec{ab} &= \vec{b} - \vec{a} = (0, 0, 16) \\ \therefore \vec{c} &= \frac{(24, 18, 0)}{\sqrt{(24)^2 + (18)^2 + (0)^2}} \times 80 = \frac{\vec{ad}}{\|\vec{ad}\|} \times 80 = \vec{c} \\ \therefore \vec{c} \times \vec{ab} &= \vec{c} \times \vec{ab} = \vec{m} \end{aligned}$$

$$\vec{c} \times \vec{ab} = \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{ab} \\ 0 & 0 & 16 \\ 24 & 18 & 0 \end{vmatrix} = \vec{c} \times \vec{ab} = \vec{m}$$

∴ مقدار عزم القوة حول $\vec{b} = \sqrt{(768)^2 + (1024)^2} = 1280$ نيوتن.سم.



على عزم قوة (أو عدة قوى) بالنسبة للنقطة في نظام إحداثي ثلاثي الأبعاد



[١] من أسئلة الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كانت : القوة $\vec{Q} = 4\vec{S} + 5\vec{V} - 3\vec{G}$ تؤثر في النقطة $A = (2, -3, 4)$

فإن عزم هذه القوة بالنسبة لنقطة الأصل يساوي

- (١) $11\vec{S} - 22\vec{V} + 22\vec{G}$ (ب) $8\vec{S} - 10\vec{V} - 12\vec{G}$
(ج) $16\vec{S} - 10\vec{V} - 6\vec{G}$ (د) $11\vec{S} + \vec{V} + 22\vec{G}$

٢) إذا أثرت القوة $\vec{Q} = 2\vec{S} - \vec{V} + 5\vec{G}$ في النقطة $A = (1, 0, -3)$ فإن عزم

هذه القوة بالنسبة للنقطة B الذي متجه موضعها $\vec{B} = 2\vec{G} + \vec{V}$ يساوي

- (١) $2\vec{S} - 17\vec{V} + \vec{G}$ (ب) $11\vec{S} + \vec{G}$
(ج) $11\vec{S} - 17\vec{V} + \vec{G}$ (د) $11\vec{S} - 17\vec{V}$

٣) إذا كان عزم القوة $\vec{Q} = 2\vec{S} - \vec{V}$ حول نقطة هو $21\vec{V} + 7\vec{G}$ فإن طول

العمود الساقط من هذه النقطة على خط عمل القوة بوحدات الطول يساوي

- (١) $\frac{1}{7}$ (ب) $\frac{1}{10}$ (ج) ٧ (د) $10\sqrt{2}$

٤) إذا كانت : $\vec{Q} = (-1, 3, -2)$ ، تؤثر في النقطة $A = (4, -1, 0)$ ،

فإن مركبة عزم \vec{Q} حول محور ع يساوي

- (١) ٨ (ب) ٢ (ج) ١١ (د) ١٣

٥) تؤثر القوة \vec{Q} التي مقدارها ٥ نيوتن في النقطة $A = (0, 6, 0)$ وتعمل في اتجاه

يوازي محور ع فإن عزم \vec{Q} بالنسبة للنقطة B $(6, 0, 0)$ هو

- (١) $30\vec{G}$ (ب) $20\vec{S} + 20\vec{V}$
(ج) $20\vec{S} + 20\vec{V} + 20\vec{G}$ (د) $20\vec{S} - 20\vec{V}$

٦ تؤثر القوة \vec{F} التي مقدارها ٩٠ نيوتن في A حيث $A(4, 0, 11)$ ، $B(0, 7, 7)$ فإن عزم القوة \vec{F} بالنسبة للنقطة $C(5, 6, 0)$ يساوي

(١) $170\vec{s} - 400\vec{v} + 520\vec{e}$ (ب) $310\vec{s} - 480\vec{v} + 520\vec{e}$

(ج) $310\vec{s} + 480\vec{v} + 520\vec{e}$ (د) $170\vec{s} + 400\vec{v} + 520\vec{e}$

٧ إذا كانت القوة $\vec{F} = (u, v, w)$ تؤثر في النقطة $A(2, 3, -1)$ فإن \vec{F} قادرة على إحداث عزم حول

(١) محور s فقط. (ب) محوري s ، v فقط.

(ج) محوري v ، e فقط. (د) المحاور s ، v ، e

٨ في الشكل المقابل :

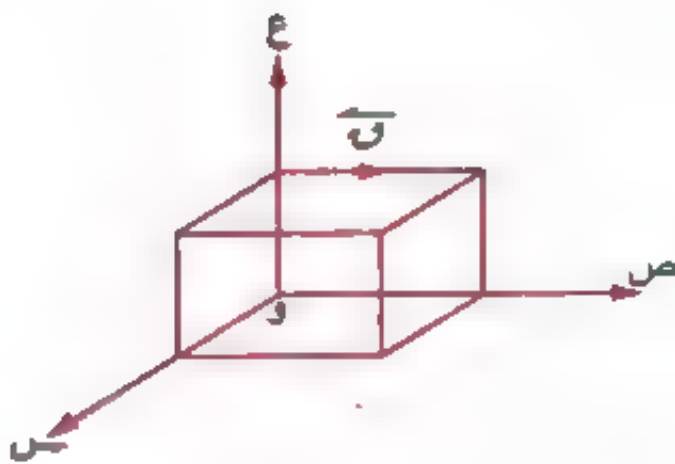
عزم القوة \vec{F} يتلشى حول

(١) محور s فقط

(ب) محور v ، ومحور e

(ج) محور s ومحور e

(د) نقطة الأصل (و)



٢ إذا كانت القوة $\vec{F} = 2\vec{s} - 4\vec{v} - 12\vec{e}$ تؤثر في نقطة $A = (-1, 2, 1)$ أوجد :

١ عزم القوة \vec{F} بالنسبة لنقطة الأصل.

٢ طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل \vec{F}

٠-٢٠ $\vec{s} - ٩\vec{v} - ٢\vec{e}$ ، $\frac{480}{13}$ وحدة طول.

٣ أوجد عزم القوة \vec{F} بالنسبة لنقطة الأصل حيث : $\vec{F} = 2\vec{s} + 3\vec{v} + 5\vec{e}$ وتأثر

في نقطة A متجه موضعها حول نقطة الأصل هو $\vec{r} = \vec{s} + \vec{v} + \vec{e}$ ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة \vec{F}

٠-٢٠ $\vec{s} - ٧\vec{v} + ٥\vec{e}$ ، $\frac{741}{19}$ وحدة طول.

٤ إذا كانت : \vec{S} ، \vec{V} ، \vec{G} مجموعة يمينية من متجهات الوحدة. وكانت القوة $\vec{Q} = 2\vec{S} + 3\vec{V} - \vec{G}$ تؤثر في نقطة $A = (1, -1, 4)$ أوجد :

- ١ عزم القوة \vec{Q} حول نقطة الأصل و $(0, 0, 0)$ $11\vec{S} + 9\vec{V} + 5\vec{G}$.
- ٢ عزم القوة \vec{Q} حول نقطة $B = (2, -3, 1)$ $11\vec{S} + 5\vec{V} - 7\vec{G}$ 2.73 وحدة طول. ثم استنتج طول العمود المرسوم من B على خط عمل القوة.

٥ قوة : $\vec{Q} = 15\vec{S} - 25\vec{V} + 40\vec{G}$ تؤثر في نقطة $A = (-2, 3, 2)$ أوجد مركبة عزم \vec{Q} حول محور z .

١٥٠٠

٦ إذا كانت : $\vec{Q} = 2\vec{S} + \vec{L} - \vec{G}$ تؤثر في النقطة $A = (4, -2, 0)$ وكان عزم \vec{Q} حول نقطة الأصل يساوي : $2\vec{S} + 4\vec{V} + 16\vec{G}$ فما قيمة L ؟

٢٠

٧ إذا كانت : \vec{S} ، \vec{V} ، \vec{G} مجموعة يمينية من متجهات الوحدة وكانت القوة $\vec{Q} = 3\vec{S} + \vec{V} + 4\vec{G}$ تؤثر في النقطة $A = (1, 0, -1)$ وكان عزم القوة \vec{Q} بالنسبة للنقطة $B = (2, -1, 3)$ يساوي $4\vec{S} - 8\vec{V} - \vec{G}$ فما قيمة L ؟

٢٠٠

٨ إذا كانت : $\vec{Q} = 5\vec{S} + \vec{L} - \vec{G}$ تؤثر في النقطة $A = (1, -2, 3)$ وكان عزم القوة \vec{Q} بالنسبة للنقطة $B = (-2, 2, 4)$ يساوي $5\vec{S} - 2\vec{V} - 7\vec{G}$ فما قيمة L ؟

١٠٠

٩ إذا كان عزم القوة $\vec{Q} = 2\vec{S} + 3\vec{V} - \vec{G}$ حول نقطة الأصل (و) هو $\vec{G} = 5\vec{S} + 3\vec{V} - \vec{G}$ ، وكانت القوة تمر بنقطة الإحداثي z لها يساوي ٢

أوجد الإحداثيين S ، G للنقطة وكذلك أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة.

$\frac{1.4}{2}$ وحدة طول.

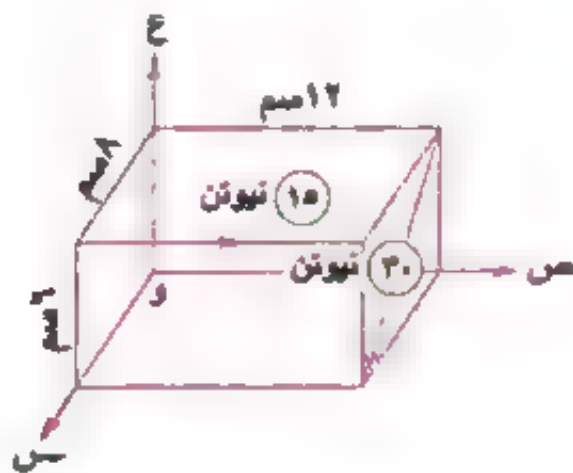
الدرس الثاني

١٠ قوة \vec{Q} تؤثر في النقطة $A(2, -1, 3)$ فإذا كان عزم \vec{Q} بالنسبة لنقطة الأصل يساوي $21\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$ أوجد \vec{Q} حيث \vec{Q} توازي محور السينات. $7\vec{e}_3$

١١ إذا كانت القوة $\vec{Q} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$ تؤثر في النقطة $A(-1, 2, -3)$ وكانت مركبة عزم \vec{Q} حول محور z تساوي -2 وحدات عزم. أوجد قيمة k ثم أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل على خط عمل القوة. $3.0, \frac{4\sqrt{14}}{14}$ وحدة طول.

١٢ إذا كانت القوة $\vec{Q} = 8\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ تؤثر في نقطة A متجه موضعها بالنسبة لنقطة الأصل هو $\vec{r} = (2, 1, 1)$ وكانت مركبة عزم \vec{Q} حول المحورين x, y, z هما $-1, -8$ على الترتيب أوجد قيمة كل من: k, m, n . $14, -1, 1$

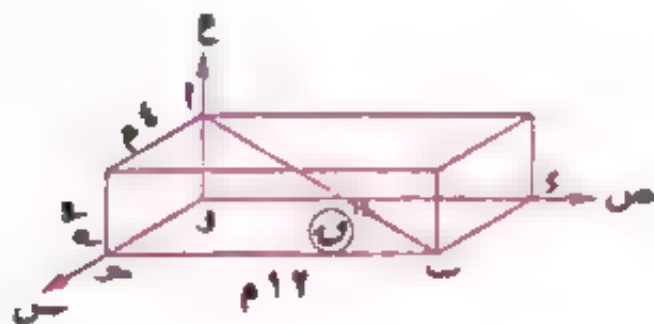
١٣ في الشكل المقابل:



أوجد مجموع عزوم القوى بالنسبة للنقطة (و)

$$-2.6\vec{e}_1 + 144\vec{e}_2 + 168\vec{e}_3$$

١٤ في الشكل المقابل:



قوة مقدارها ١٣٠ نيوتن تؤثر في القطر AB في متوازي مستطيلات أبعاده ٣ م، ٤ م، ١٢ م كما بالشكل

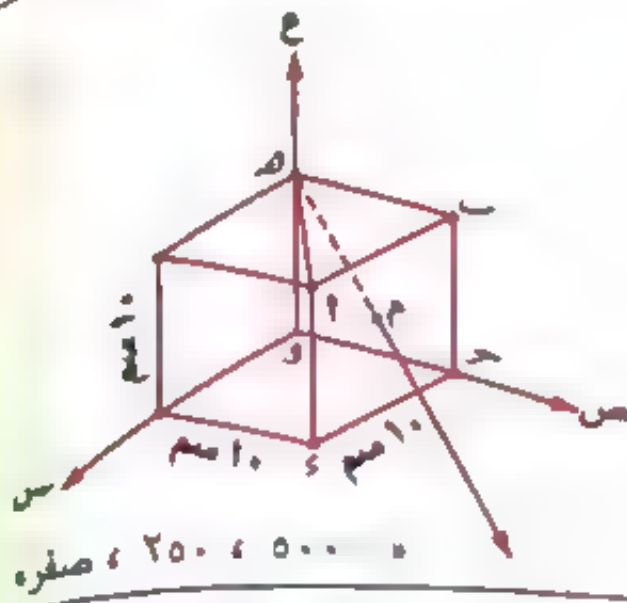
أوجد عزم القوة \vec{Q} حول النقطة O

$$120\vec{e}_1 + 480\vec{e}_2$$

الوحدة 2

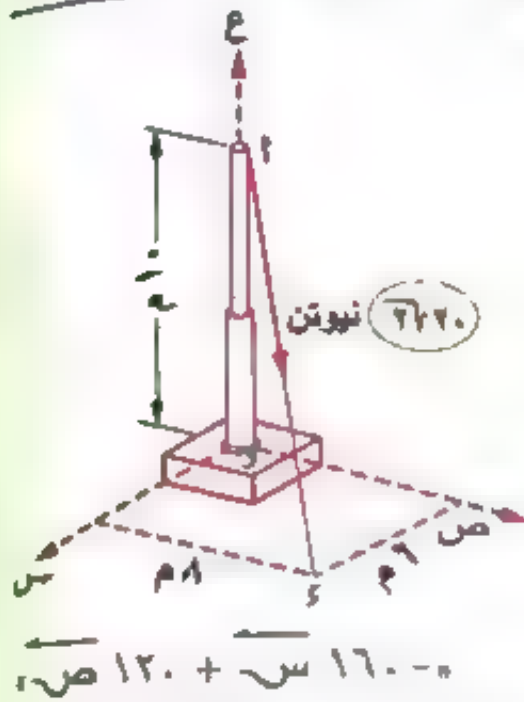
١٥ في الشكل المقابل :

قوة معيارها $20\sqrt{2}$ نيوتن تؤثر في M
حيث M مركز المربع $ABCD$
أوجد مركبات عزم القوة بالنسبة
لمحاور الإحداثيات.



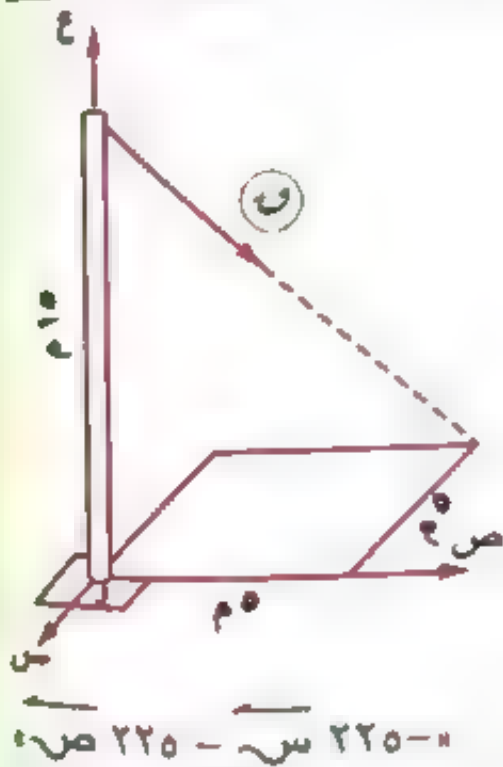
١٦ في الشكل المقابل :

تؤثر قوة مقدارها $20\sqrt{2}$ نيوتن في نقطة P
أوجد عزم القوة بالنسبة للنقطة O



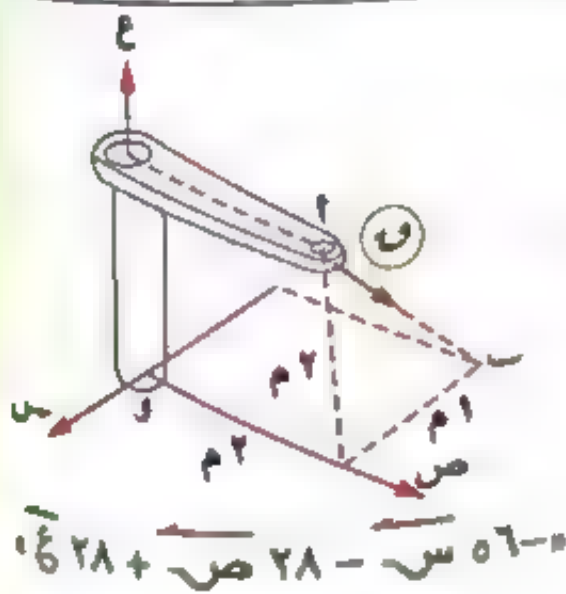
١٧ في الشكل المقابل :

أوجد عزم القوة $F = 10\sqrt{2}$ نيوتن
حول نقطة O



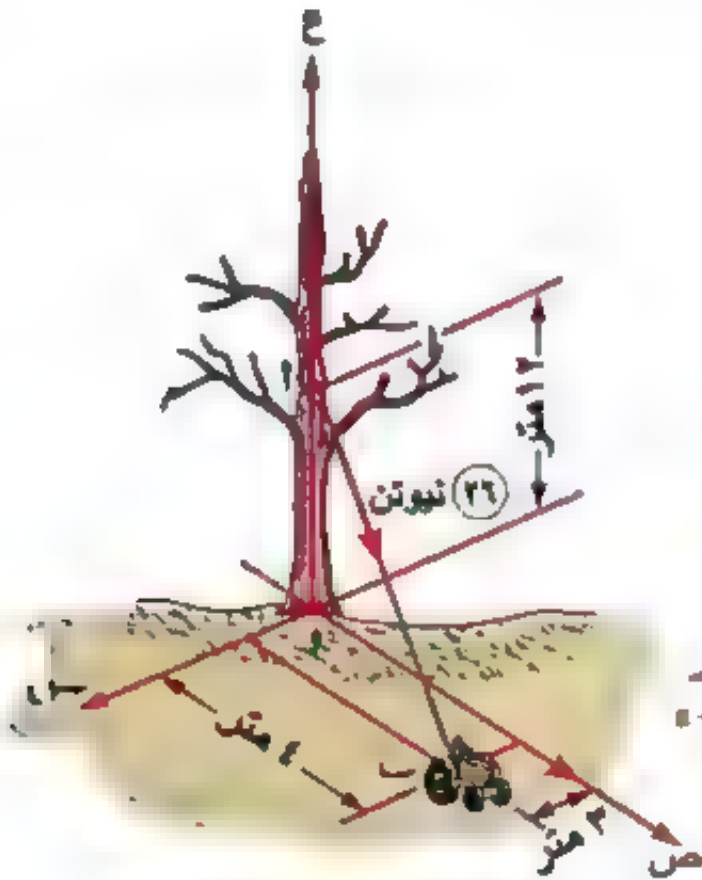
١٨ في الشكل المقابل :

احسب عزم القوة $F = 14\sqrt{5}$ نيوتن
حول النقطة O



٢٩ في الشكل المقابل :

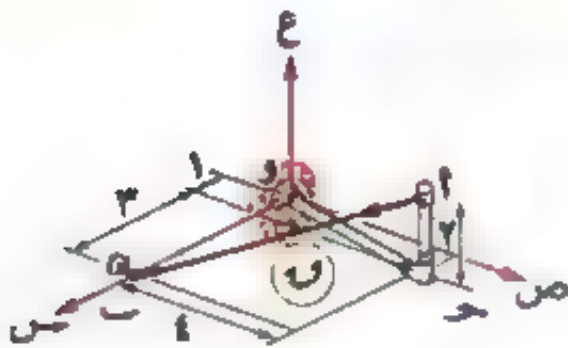
احسب العزم المتولد من
القوة $Q = 26$ نيوتن حول
نقطة الأصل (و) بدلالة
الإحداثيات المتجهة.



$$= -96\vec{s} + 72\vec{v}$$

٢٠ في الشكل المقابل :

عين عزم القوة $Q = 29\sqrt{2}$ نيوتن حول نقطة و
اكتب العزم بدلالة
الإحداثيات المتجهة.



$$= 16\vec{v} - 22\vec{g}$$

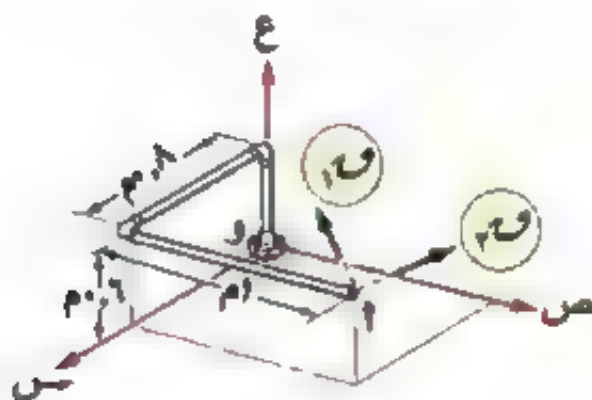
٢١ في الشكل المقابل :

$$\text{إذا كان : } \vec{Q} = 100\vec{s} - 120\vec{v} + 70\vec{g}$$

$$، \vec{Q} = 200\vec{s} + 250\vec{v} + 100\vec{g}$$

تؤثران في النقطة ٢

احسب عزم محصلة القوتين حول نقطة (و)
بدلالة الإحداثيات المتجهة.



$$= 97\vec{s} - 200\vec{v} + 204\vec{g}$$

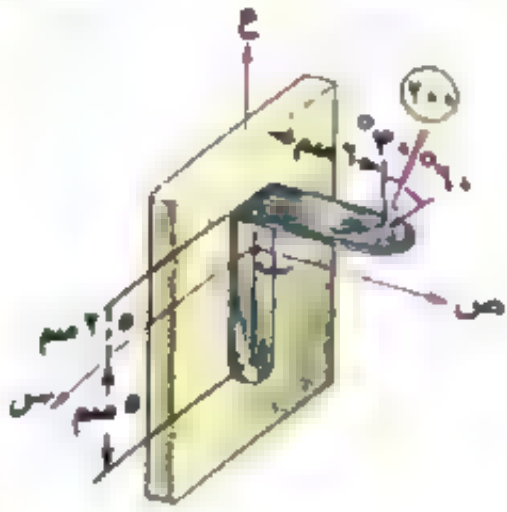
الوحدة 2

٢٣ في الشكل المقابل :

قوة مقدارها ٢٠٠ نيوتن تؤثر

كما بالشكل المقابل

احسب عزم هذه القوة حول النقطة أ

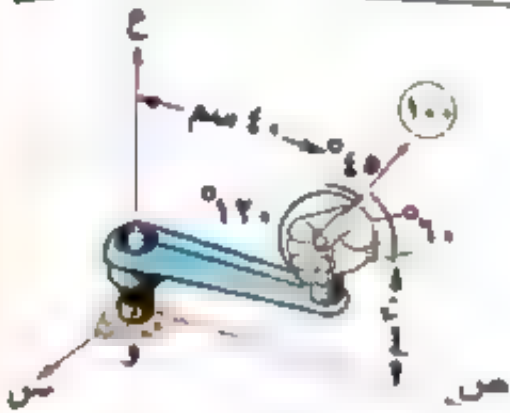


$$= 600\sqrt{2} - 700\sqrt{3} + 200\sqrt{6}$$

٢٤ في الشكل المقابل :

أوجد مقدار عزم القوة ١٠٠ نيوتن

حول محور س.



١٣٢٨.٤٣ نيوتن. سم تقريباً

٢٥ في الشكل المقابل :

أ ب قضيب طوله ٦ متر مثبت من طرفه أ

ومتصل بطرفه الآخر بنقطة ح على الحائط الرأسى

بواسطة كابل فإذا كان الشد فى الكابل يساوى ٦.٥ نيوتن

احسب عزم قوة الشد حول النقطة أ



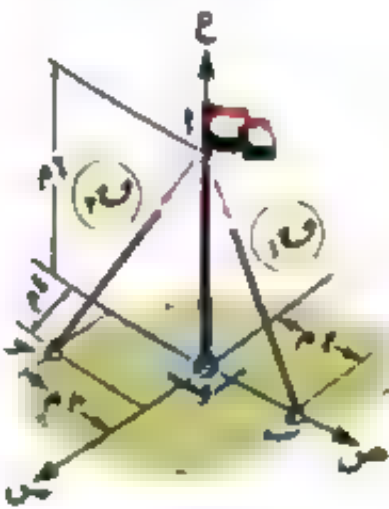
$$= 9\sqrt{2} + 12\sqrt{6}$$

٢٦ [] تؤثر القوة $\vec{F} = 6\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}$ نيوتن ، $\vec{F} = 6\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6}$ نيوتن

فى اتجاهات أ ب ، أ ح كما بالشكل.

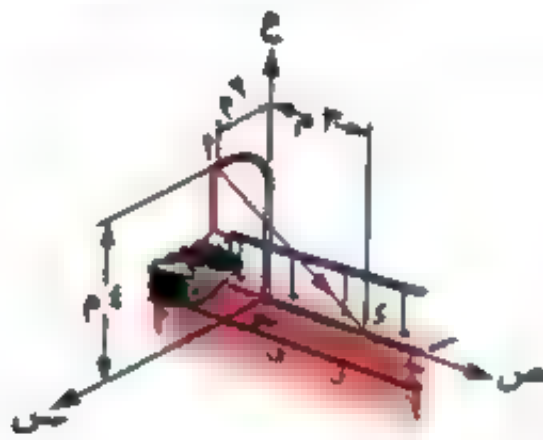
أوجد : ١) مجموع عزوم القوى حول نقطة و

٢) عزم محصلة القوتين حول نقطة و ماذا تستنتج ؟



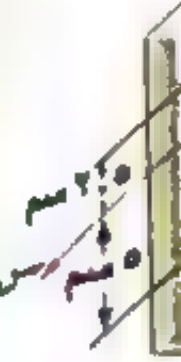
$$= 54\sqrt{2} + 24\sqrt{3}$$

٢٧ في الشكل المقابل :



حبل مثبت في النقطة E يمر على بكرة ملساء عند A ويتدلى من الطرف الآخر للحبل زورق صغير. فإذا كان مقدار الشد في الحبل AE يساوي $29\sqrt{2}$ نيوتن. أوجد عزم الشد في الحبل حول النقطة C .

$\vec{F}_1 = 120\text{ N}$ و $\vec{F}_2 = 20\text{ N}$



$\vec{F}_1 = 120\text{ N}$



سم تقريباً



$\vec{F}_1 = 120\text{ N}$



الوحدة 3 القوى المتوازية المستوية



محطة القوى المتوازية المستوية.

الدرس الأول

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية.

الدرس الثاني



يمكنك حل
الامتحانات التفاعلية
على الدروس
من خلال مسح QR code
الخاص بكل امتحان

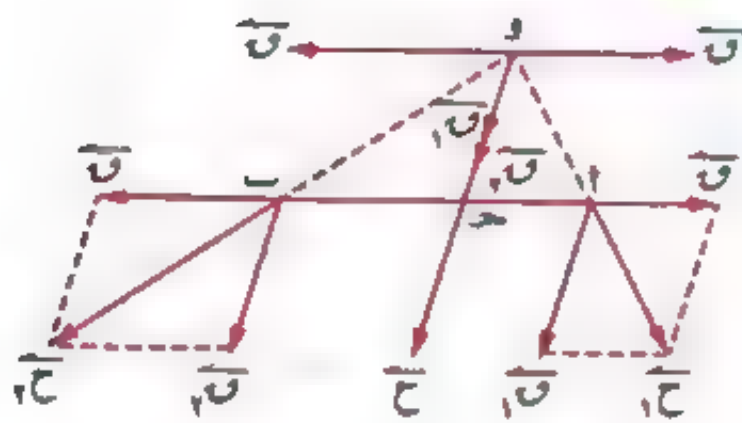


1

محصلة القوى المتوازية المستوية

القوى المتوازية المستوية هي القوى التي تتوازي خطوط عملها وتقع جميعاً في مستوى واحد. وسوف نتعرف في هذا الدرس على كيفية تعيين محصلة القوى المتوازية المستوية التي تؤثر في جسم متماسك تعييناً تاماً (مقداراً واتجهاً ونقطة تأثير).

أولاً: محصلة قوتين متوازيتين مستويتين



الحالة الأولى: القوتان متحدتا الاتجاه:

بفرض أن \vec{F}_1 ، و \vec{F}_2 قوتان متوازيتان ويعملان في نفس الاتجاه ويؤثران في جسم متماسك في نقطتين 1، 2 ومحصلتها \vec{R}

ولتحديد المحصلة تحديداً تاماً نقوم بالخطوات التالية :

* نفرض قوتين \vec{F}_1 ، و \vec{F}_2 تؤثران في 1، 2 «متساويتان في المقدار ومتضادتين في الاتجاه» أي ليس لهما تأثير

* \vec{R}_1 هي محصلة \vec{F}_1 ، و \vec{F}_2 عند 2

* \vec{R}_2 هي محصلة \vec{F}_2 ، و \vec{F}_1 عند 1

* نفرض أن خطى عمل \vec{R}_1 ، \vec{R}_2 يتقاطعان في النقطة (O)

* استبدل \vec{R}_1 عند النقطة (O) بمركبتها \vec{F}_1 ، و \vec{R}_2

* استبدل \vec{C} عند النقطة (و) بمركبتها \vec{P} ، \vec{Q}

* فلاحظ أن القوى المؤثرة عند (و) هي :

• \vec{P} ، \vec{Q} تعملان في اتجاه \vec{C} الموازى لخط عمل القوتين الأصليتين.

• \vec{P} ، \vec{Q} وتعملان في اتجاهين متضادين أى ليس لهما تأثير

∴ تأثير \vec{P} ، \vec{Q} عند النقطة (و) هو نفس تأثير \vec{P} ، \vec{Q} عند أ ، ب

وبالتالى $\vec{C} = \vec{P} + \vec{Q}$ ويؤثر في اتجاه \vec{C}

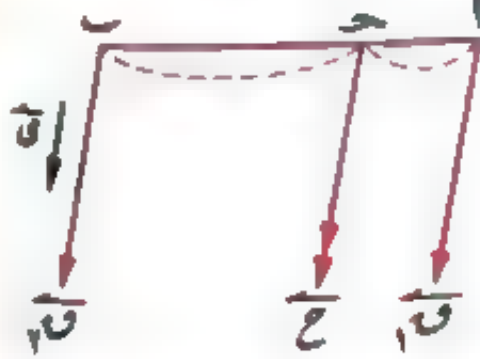
وحيث أن القوى \vec{P} ، \vec{Q} ، \vec{C} متوازية فإن : $\frac{P}{C} = \frac{1}{2}$ (١) ، $\frac{Q}{C} = \frac{2}{3}$ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{Q}{P} = \frac{1}{2}$ ∴ $P \times 2 = Q$ ∴ $2P = Q$

قاعدة

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه هي قوة لها نفس اتجاه القوتين ومعايرها يساوى مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعايريهما.

إذا كانت القوتان \vec{P} ، \vec{Q} في نفس الاتجاه وتؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإن : $\vec{C} = (\vec{P} + \vec{Q})$



فإذا كان : \vec{C} متجه وحدة في اتجاه القوتين

فإن : $\vec{C} = \vec{P} + \vec{Q} = (\vec{P} + \vec{Q})$

وتتعين المحصلة تعييناً تاماً كما يلي :

• مقدار المحصلة : $\vec{C} = \vec{P} + \vec{Q}$ • اتجاه المحصلة : في نفس اتجاه القوتين

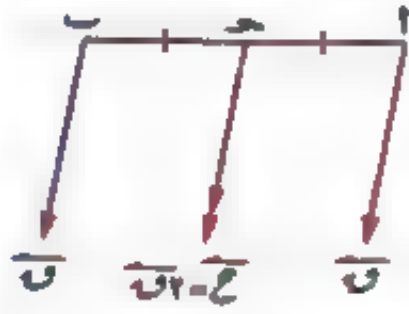
• نقطة تأثير المحصلة : ح تقسم أ ب من الداخل بحيث $2P = Q$

• ومن قوانين التناسب يمكن استنتاج أن :

$$\frac{C}{P} = \frac{2}{1} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة

إذا كانت القوتان \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2 متحدين في الاتجاه ومتساويتين في المقدار ومقدار كل منهما يساوي Q تؤثران في نقطتين مختلفتين A ، B من جسم متماسك فإن :



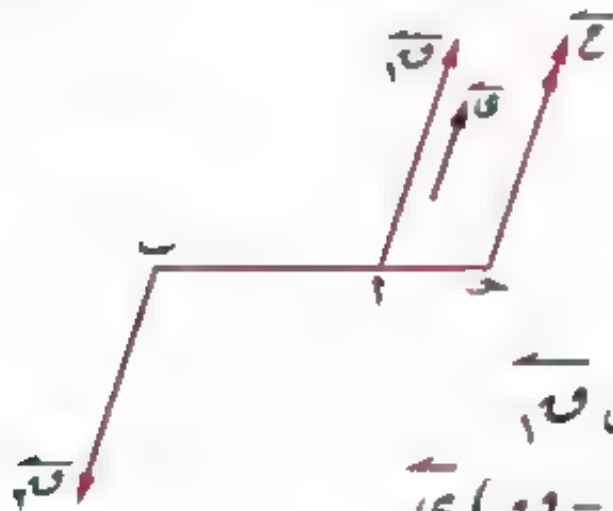
- مقدار المحصلة : $Q = Q_1 + Q_2$
- اتجاه المحصلة : في نفس اتجاه القوتين
- نقطة تأثير المحصلة : C منتصف AB

الحالة الثانية القوتان متضادتان في الاتجاه :

قاعدة

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين في الاتجاه وغير متساويتين في المعيار هي قوة في اتجاه القوة الأكبر معياراً ويساوي معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطي عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معياراً بنسبة عكسية لمعياريهما.

إذا كانت القوتان \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2 متضادتين في الاتجاه وتؤثران في النقطتين A ، B على الترتيب من جسم متماسك وكان $Q_1 < Q_2$



فإن : $\vec{Q} = (\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2)$ (محصلة القوتين \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2)

فإذا كان : \vec{Q} متجه وحدة في اتجاه القوة الأكبر معياراً وهي \vec{Q}_2

فإن : $\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = (\vec{Q}_1 - \vec{Q}_2)$ $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}$ $(Q_1 - Q_2) = Q$

وتتعين المحصلة تعييناً تاماً كما يلي :

• مقدار المحصلة : $Q = |Q_1 - Q_2|$

• اتجاه المحصلة : في اتجاه القوة الأكبر مقداراً

• نقطة تأثير المحصلة : C تقسم AB من الخارج بحيث $Q_1 \times AC = Q_2 \times BC$

• ومن قوانين التناسب نجد أن : $\frac{Q}{AB} = \frac{Q_1}{AC} = \frac{Q_2}{BC}$

ملاحظة

إذا كانت P ، Q هما نقطتي تأثير القوتين المتوازيتين اللتين مقداراهما Q_1 ، Q_2 ومحصلتهما (R) وفي كل حالة يتغير فيها ميل القوتين يتغير ميل المحصلة تبعاً لذلك ونلاحظ أن جميع خطوط عمل المحصلة الناتجة من كل حالة تتقاطع جميعاً في نقطة واحدة تقع على \overleftrightarrow{AB} وتسمى نقطة تأثير المحصلة.

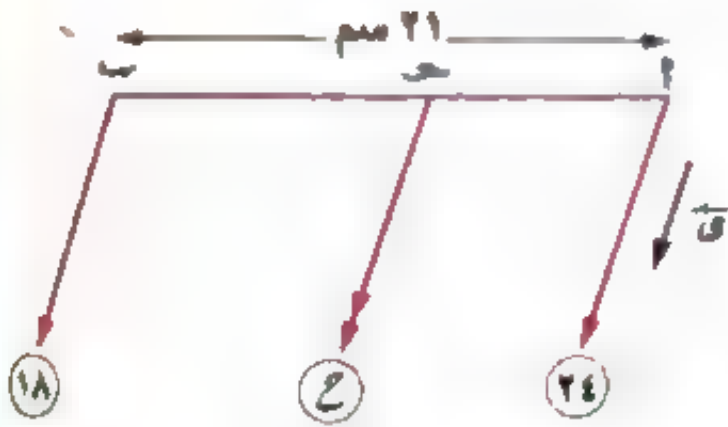
مثال ١

قوتان متوازيتان مقداراهما 24 ، 18 نيوتن تؤثران في النقطتين P ، Q على الترتيب من جسم متماسك حيث : $PQ = 21$ سم. أوجد مقدار واتجاه محصلتهما ويُعد نقطة تأثيرها عن النقطة P إذا كانت :

- ١) القوتان في اتجاه واحد. ٢) القوتان في اتجاهين متضادين.

الحل

١) القوتان في اتجاه واحد :



يفرض أن \vec{R} متجه وحدة في اتجاه القوتين

$$\therefore \vec{Q}_1 = 24\vec{R} \text{ ، } \vec{Q}_2 = 18\vec{R}$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = 24\vec{R} + 18\vec{R} = 42\vec{R}$$

\therefore مقدار المحصلة $R = 42$ نيوتن ، اتجاه المحصلة في نفس اتجاه القوتين

وبفرض أن المحصلة تؤثر في النقطة $H \in \overleftrightarrow{PQ}$

$$\therefore Q_1 \times PH = Q_2 \times QH$$

$$\therefore 24 \times 21 = 18 \times (21 - PH) \text{ ، وبالقسمة على ٦}$$

$$\therefore 24 \times 7 = 18 \times (7 - PH) \therefore 168 = 126 - 18PH$$

$$\therefore 42 = 18PH$$

$$\therefore PH = 9 \text{ سم}$$

\therefore بُعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة $P = 9$ سم

حل آخر

$$\frac{42}{21} = \frac{18}{PH} = \frac{24}{21 - PH}$$

$$\therefore PH = 9 \text{ سم}$$

٢) القوتان في اتجاهين متضادين :

بفرض أن \vec{u} متجه وحدة في اتجاه القوة الأكبر مقدارًا أي القوة التي مقدارها ٢٤ نيوتن

$$\therefore \vec{u} = \vec{u}_{24} , \vec{u} = -\vec{u}_{18}$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{u}_{24} + (-\vec{u}_{18}) = \vec{u}_6$$

\therefore مقدار المحصلة : $R = 6$ نيوتن

، اتجاه المحصلة في اتجاه القوة التي مقدارها ٢٤ نيوتن

وبفرض أن المحصلة تؤثر في النقطة $S \Rightarrow \vec{S} \neq \vec{A}$ بحيث $\vec{S} \neq \vec{A}$

$$\therefore \vec{S} \times \vec{u} = \vec{A} \times \vec{u}$$

$$\therefore (24 + 18) \times 18 = 24 \times 24 \quad \text{، بالقسمة على 6}$$

$$\therefore (24 + 18) \times 2 = 24 \times 4 \quad \therefore 84 + 36 = 96 \quad \therefore 120 = 96$$

$$\therefore 120 = 96 \text{ سم}$$

\therefore بُعد نقطة تأثير المحصلة عن النقطة $A = 120$ سم

ملاحظة

يمكن تحديد مقدار واتجاه محصلة قوتين متوازيتين دون الإشارة إلى متجه الوحدة \vec{u} وذلك بتطبيق قاعدتي إيجاد المحصلة السابق ذكرهما ، ففي المثال السابق :

١) إذا كانت القوتان في اتجاه واحد فإن : $R = 18 + 24 = 42$ نيوتن

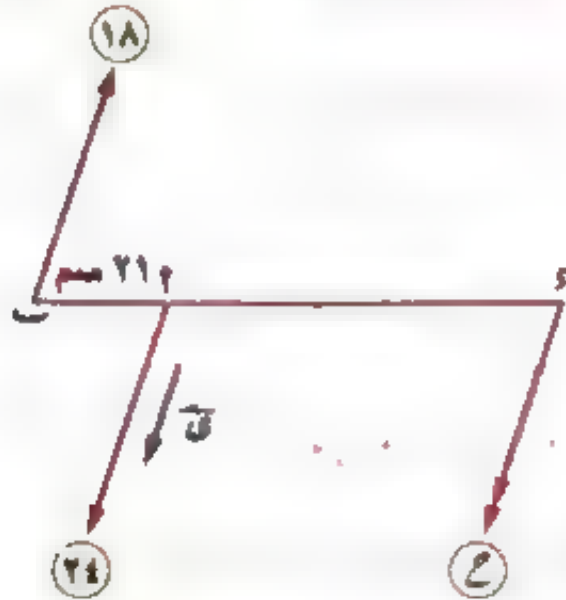
واتجاه المحصلة في نفس اتجاه القوتين.

٢) إذا كانت القوتان في اتجاهين متضادين فإن : $R = 24 - 18$ حيث $24 > 18$

$$\therefore R = 24 - 18 = 6 \text{ نيوتن}$$

واتجاه المحصلة في نفس اتجاه القوة ذات المقدار الأكبر وهو ٢٤ نيوتن.

لاحظ أن
المحصلة تكون أقرب إلى القوة الأكبر مقدارًا



حل آخر

$$\frac{24}{24} = \frac{18}{36} = \frac{6}{36}$$

$$\therefore 36 = 120 \text{ سم}$$

قوتان \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 متوازيتان وخط عمل محصلتهما يبعد عن خط عمل الأولى بمقدار ٩ سم وعن خط عمل الثانية بمقدار ١٢ سم فإذا كان مقدار المحصلة ١٤ نيوتن فأوجد \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 إذا كانتا :

١) في اتجاه واحد. ٢) في اتجاهين متضادين.

الحل

١) \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 في اتجاه واحد :

∴ المحصلة في اتجاههما وخط عملها يقع بين خطي عملهما

وبفرض أن \vec{F} متجه وحدة في اتجاه القوتين

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1 \vec{F} , \vec{F}_2 = \vec{F}_2 \vec{F} , \vec{F} = \vec{F} \vec{F}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 \vec{F} + \vec{F}_2 \vec{F} \therefore 14 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$12 \times \vec{F}_2 = 9 \times \vec{F}_1 \therefore \vec{F}_2 = \frac{3}{4} \vec{F}_1$$

وبالتعويض من (٢) في (١) :

$$14 = \vec{F}_1 + \frac{3}{4} \vec{F}_1 \therefore 14 = \vec{F}_1 \frac{7}{4}$$

$$\therefore \vec{F}_1 = 8 \text{ نيوتن} , \vec{F}_2 = 6 \text{ نيوتن}$$

$$\vec{F}_1 = 8 \vec{F} , \vec{F}_2 = 6 \vec{F}$$

٢) \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 في اتجاهين متضادين :

∴ خط عمل المحصلة أقرب للقوة الأولى منه للقوة الثانية

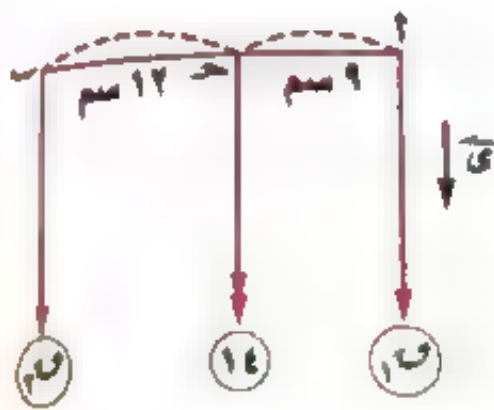
$$\therefore \vec{F}_1 < \vec{F}_2 \text{ في اتجاه } \vec{F}$$

وبفرض أن \vec{F} متجه وحدة في اتجاه \vec{F}

$$\vec{F} = \vec{F}_1 \vec{F} - \vec{F}_2 \vec{F} , \vec{F}_1 = \vec{F}_1 \vec{F} , \vec{F}_2 = \vec{F}_2 \vec{F}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 \vec{F} - \vec{F}_2 \vec{F} \therefore 14 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

$$\therefore 14 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$



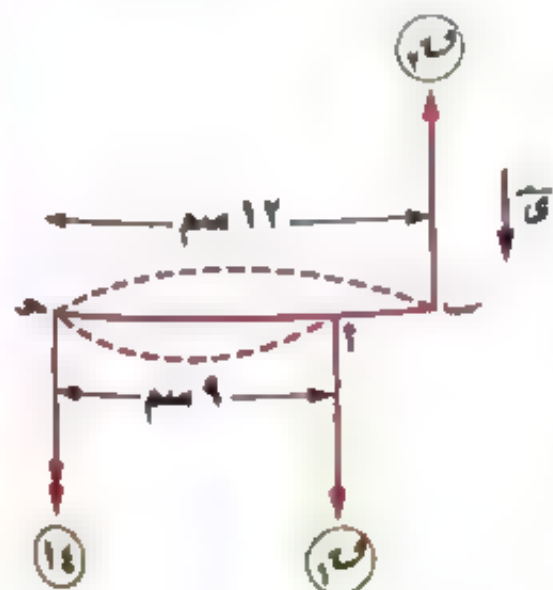
(١)

(٢)

حل آخر

$$\frac{14}{21} = \frac{\vec{F}_1}{9} = \frac{\vec{F}_2}{12} \therefore$$

$$\therefore \vec{F}_1 = 8 , \vec{F}_2 = 6$$



(١)

(٢)

$$\therefore \frac{2}{3} = 2 \text{ نيوطن}$$

$$12 \times 2 = 9 \times 2$$

وبالتعويض من (٢) في (١) :

$$\therefore 14 = 2 - \frac{2}{3}$$

$$2 = 42 \text{ نيوطن}$$

$$\therefore 56 = 2 \text{ نيوطن} , 42 = 2 \text{ نيوطن}$$

حل آخر

$$\therefore \frac{14}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2}{12}$$

$$\therefore 56 = 2 \text{ نيوطن} , 42 = 2 \text{ نيوطن}$$

ملاحظة هامة

إذا عُلِّمت إحدى قوتين متوازيتين \vec{P} و \vec{Q} وعُلِّمت محصلتهما \vec{R} فلتعيين القوة الثانية \vec{P} نراعى مايلي :

أولاً : إذا كانت \vec{P} ، \vec{Q} في اتجاهين متضادين فإن :

$$* \vec{P} = \vec{Q} + \vec{R}$$

* خط عمل \vec{P} يقع بين خطي عمل \vec{Q} ، \vec{R}

* \vec{P} في نفس اتجاه \vec{Q}

ثانياً : إذا كانت \vec{P} ، \vec{Q} في اتجاه واحد ، $\vec{Q} < \vec{P}$ فإن :

$$* \vec{P} = \vec{Q} - \vec{R}$$

* خط عمل \vec{P} يقع خارج خطي عمل

\vec{Q} ، \vec{R} من ناحية \vec{Q}

* \vec{P} في نفس اتجاه \vec{Q}

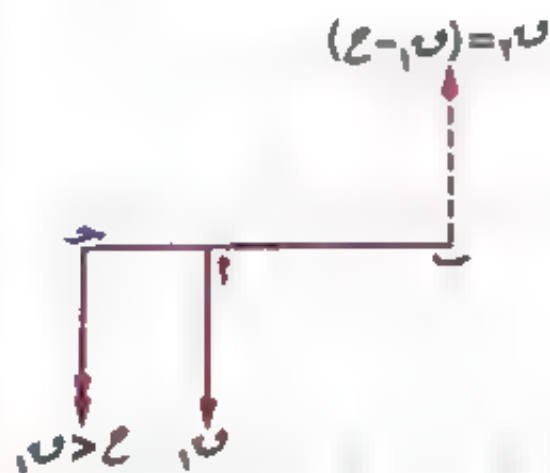
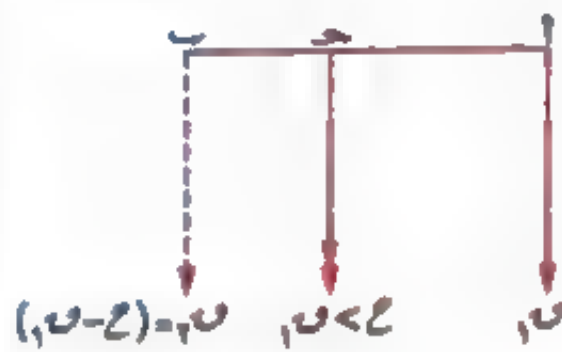
ثالثاً : إذا كانت \vec{P} ، \vec{Q} في اتجاه واحد ، $\vec{Q} > \vec{P}$ فإن :

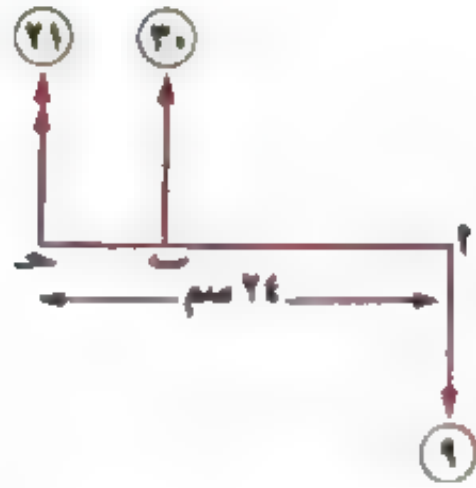
$$* \vec{P} = \vec{Q} - \vec{R}$$

* خط عمل \vec{P} يقع خارج خطي عمل

\vec{Q} ، \vec{R} من ناحية \vec{Q}

* \vec{P} في اتجاه مضاد لاتجاه \vec{Q}





وبفرض أن \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2 ، \vec{H} تؤثر في النقط ١، ٢، ٣،
على الترتيب حيث $\vec{H} \in \vec{AB}$ ، $\vec{H} \notin \vec{AB}$

$$\therefore \vec{Q}_1 \times \vec{A} = \vec{Q}_2 \times \vec{B}$$

$$\therefore 30 \times 24 = 9 \times \vec{B}$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{24 \times 9}{30} = 7.2 \text{ سم}$$

\therefore خط عمل \vec{Q}_2 يبعد ٧.٢ سم عن خط عمل المحصلة \vec{H}

مثال ٤

قوتان مقداراهما ٨، ٢ نيوتن متوازيتان ومحصلتهما مقدارها ٢ نيوتن وخط عملها يبعد عن خط عمل القوة الأولى مسافة ٣٠ سم، بين أن \vec{Q} لها قيمتان وأوجد البعد بين خطي عمل القوتين في الحالتين.

الحل

$\therefore \vec{H} = 2$ نيوتن أصغر من معيار القوة الأولى وهو ٨ نيوتن

\therefore القوتان اللتان مقداراهما ٨، ٢ متضادتان في الاتجاه (إذ لو كانتا في اتجاه واحد لكان مقدار المحصلة يساوي ٨ + ٢ أي أكبر من ٨) وعلى ذلك يكون هناك احتمالان :

إما $8 > 2$ ، أو $8 < 2$

في الحالة الأولى أي $8 > 2$

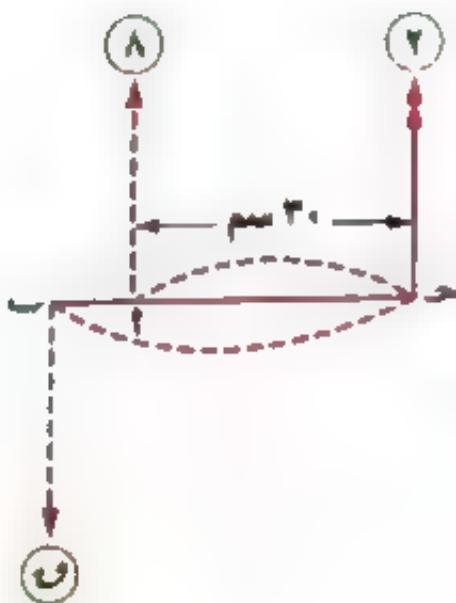
$$\therefore \vec{H} = 8 - 2 \text{ أي } 6 \text{ نيوتن}$$

$$\text{ويكون: } 8 \times 30 = 2 \times \vec{B}$$

$$\text{أي: } 6 \times 30 = 2 \times \vec{B}$$

$$\therefore \vec{B} = 40 \text{ سم}$$

\therefore البعد بين خطي عمل القوتين $40 - 30 = 10 \text{ سم}$.



في الحالة الثانية أي $u < 8$

$$\therefore u = 10 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore 8 - u = 2 \text{ أي } 8 - u = 2$$

$$\text{ويكون: } 20 \times 8 = u \times 2$$

$$\therefore 24 = 2u$$

$$\text{أي: } 20 \times 8 = u \times 10$$

$$\therefore \text{البعد بين خطي عمل القوتين} = 24 - 20 = 4 \text{ سم}$$



مثال ٥

قوتان متوازيتان مقدار أصغرهما ٦٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ من قضيب خفيف أ ب والكبرى تؤثر في الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ٢٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ١٢٠ سم فما طول القضيب ؟

الحل

بفرض أن $u_1 = 60$ نيوتن ، $u_2 = u$ نيوتن

$$u > 60$$

\therefore القوتان u_1 ، u_2 في اتجاهين متضادين

$$u_1 < u_2 \therefore \text{المحصلة } \vec{R} \text{ في اتجاه } u_2$$

وبفرض أن \vec{u} متجه وحدة في اتجاه المحصلة \vec{R}

$$\therefore \vec{R} = 20 \text{ ن} ، \vec{u}_1 = 60 \text{ ن}$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \therefore 20 = 60 + u_2$$

$$\therefore u_2 = 80 \text{ ن} \therefore u = 80 \text{ نيوتن}$$

وبفرض أن المحصلة \vec{R} تؤثر في ح حيث $\exists \vec{R} \neq \vec{A}$ ، $\vec{R} \neq \vec{B}$

$$\therefore u_1 \times a = u_2 \times b$$

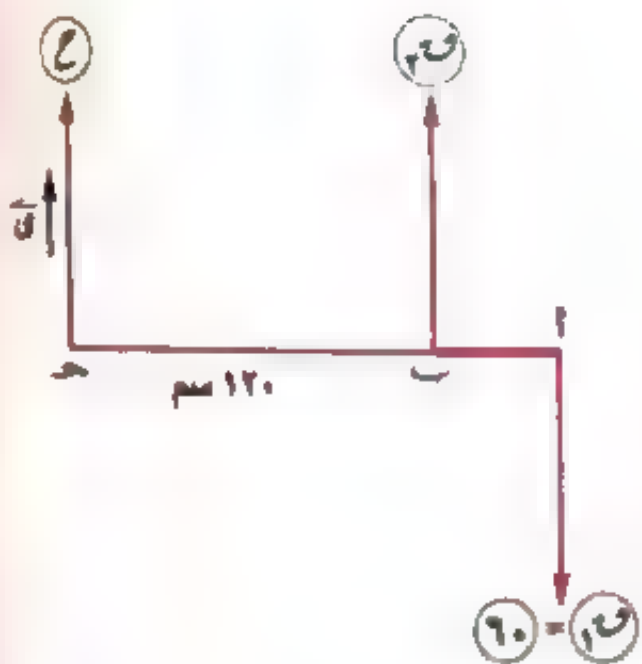
$$\therefore 60 \times (120 + a) = 80 \times 120$$

$$\therefore 120 + a = 2 \times 80$$

$$\therefore 160 = 120 + a$$

$$\therefore a = 40 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{طول القضيب} = 40 \text{ سم}$$



مثال ٦

قوتان متوازيتان في اتجاه واحد مقدارهما ١٠ و ٢٠ نيوتن تؤثران في النقطتين $أ$ و $ب$ على الترتيب فإذا تحركت القوة ١٠ بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها ٣ م على $أ$ فثبت أن محصلة القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{١}{٤}$ م في نفس الاتجاه.

الحل

• قبل تحريك القوة ١٠ :



$$١٠ \times ١ = ٢٠ \times ٣ \quad \text{بالقسمة على } ١٠$$

$$\therefore ١ = ٢٠ \times ٣ \quad (١)$$

• بعد تحريك القوة ١٠ مسافة ٣ م في اتجاه $أ$:



بفرض أن المحصلة تتحرك مسافة $ص$ م في نفس الاتجاه

$$\therefore ١٠ \times ١ = ٢٠ \times ٣ + ص \times ١$$

$$\therefore ١٠ \times (١ - ٣) = ص \times ١ \quad \text{بالقسمة على } ١٠$$

$$\therefore ١ - ٣ = ص \quad \therefore ٢ = ص$$

$$\text{وبالتعويض من (١) : } \therefore ١ = ٢٠ \times ٣ + ٢ \times ١$$

$$\therefore ١ = ٢٠ \times ٣ + ٢ \quad \therefore ١ = ٦٠ + ٢$$

$$\therefore \text{المحصلة تتحرك مسافة } \frac{١}{٤} \text{ م في نفس الاتجاه.}$$

عزوم القوى المتوازية

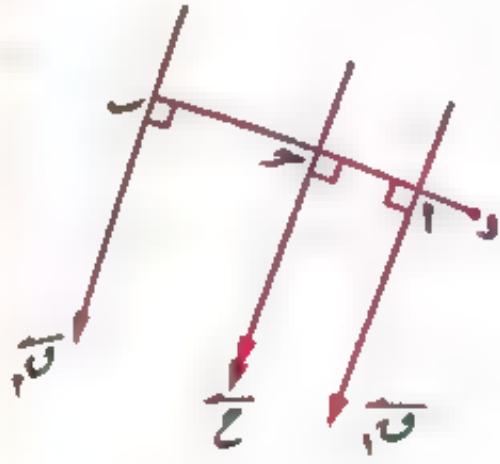
النظرية

المجموع الجبري لعزوم عدة قوى متوازية مستوية حول أية نقطة في مستويها يساوي عزم محصلتها حول نفس النقطة.

سوف نبرهن النظرية باستخدام قوتين فقط أما إذا كانت مجموعة القوى مكونة من أكثر من قوتين فيمكن تحصيل كل قوتين (لا تنعدم محصلتهما) منهم إلى أن تؤول المجموعة إلى قوتين متوازيتين فقط.

البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)

أولاً : القوتان في اتجاه واحد :



نفرض أية نقطة مثل (و) في مستوى القوتين ونرسم منها عموداً على خطوط عمل القوتين ومحصليهما كما في الشكل المقابل
 \therefore المجموع الجبري لعزمتي F_1 ، F_2 حول و

$$F_1 \times a + F_2 \times b =$$

$$F_1 (a - a) + F_2 (a + b) =$$

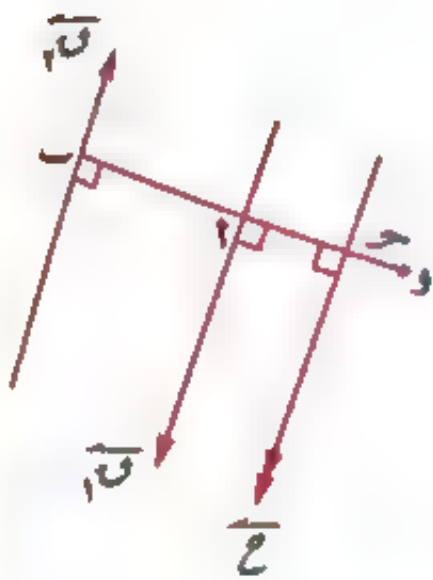
$$F_1 \times a - F_1 \times a + F_2 \times a + F_2 \times b =$$

$$\text{لكن } F_1 \times a = F_2 \times a \text{ لأن نقطة تأثير المحصلة ، } F = F_1 + F_2$$

\therefore المجموع الجبري لعزمتي F_1 ، F_2 حول و = $F \times c$ (وهو المطلوب)

$$(F_1 + F_2) \times c = F \times c = \text{عزم المحصلة حول (و)}$$

ثانياً : القوتان في اتجاهين متضادين :



نفرض أية نقطة (و) في المستوى ونرسم منها عموداً على خطوط عمل القوتين ومحصليهما كما في الشكل المقابل

\therefore المجموع الجبري لعزمتي F_1 ، F_2 حول و

$$F_1 \times a - F_2 \times b =$$

$$F_1 (a + a) - (F_2 \times a + F_2 \times b) =$$

$$F_1 \times a + F_1 \times a - F_2 \times a - F_2 \times b =$$

$$\text{لكن } F_1 \times a = F_2 \times a \text{ لأن نقطة تأثير المحصلة ، } F = F_1 - F_2$$

\therefore المجموع الجبري لعزمتي F_1 ، F_2 حول و = $F \times c$ (وهو المطلوب)

$$(F_1 - F_2) \times c = F \times c = \text{عزم المحصلة حول و}$$

(وهو المطلوب)

ملاحظة

النظرية السابقة صحيحة في حالة كون القوى المستوية غير متوازية.

ثانياً : محصلة عدة قوى متوازية مستوية

إذا كانت : $\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \vec{Q}_3, \dots, \vec{Q}_n$ عدة قوى متوازية مستوية فإن :

① لتعيين مقدار واتجاه المحصلة نستخدم العلاقة :

$$\vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \dots + \vec{Q}_n$$

② لتعيين نقطة تأثير المحصلة نستخدم نظرية العزوم.

مثال ٧

أربع قوى متوازية ومتحدة الاتجاه مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٥ ، ٧ ثقل كجم تؤثر عند النقاط ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على الترتيب الواقعة على خط مستقيم واحد عمودي على اتجاه القوى. فإذا كان : $١ = ٢ = ٣ = ٤ = ٦$ سم ، $١٥ = ٤$ سم فأوجد محصلة هذه القوى.

الحل

• لتحديد مقدار واتجاه المحصلة :

نفرض \vec{y} متجه وحدة في اتجاه القوى

$$\therefore \vec{R} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3 + \vec{Q}_4$$

$$\therefore \vec{R} = ٣٠ \vec{y}$$

∴ المحصلة مقدارها ٣٠ ث.كجم وفي اتجاه القوى.

• لتحديد نقطة تأثير المحصلة :

نفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م $\vec{R} \ni \vec{M}$

∴ القياس الجبري لعزم المحصلة حول ١ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ١

$$\therefore \text{عزم المحصلة حول ١} = ٨ \times ٠ + ١٠ \times ٦ + ٥ \times ٩ + ٧ \times ١٥ = ٢١٠ \text{ ث.كجم.سم}$$

∴ المحصلة تعمل على الدوران حول ١ في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أي أن خط عملها

يقع إلى اليسار من النقطة ١ أي أن $\vec{R} \ni \vec{M}$

$$\therefore ٢١٠ = \vec{R} \times \vec{M} \text{ أي } ٢١٠ = ٣٠ \times \vec{M} \therefore \vec{M} = ٧ \text{ سم}$$

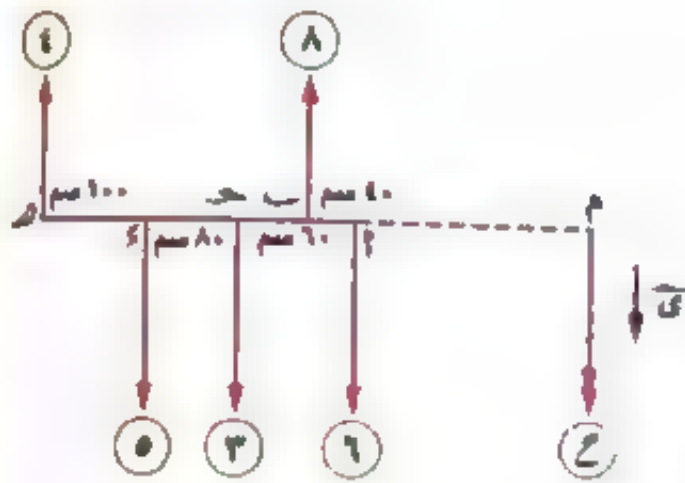
∴ خط عمل المحصلة يمر بنقطة م $\vec{R} \ni \vec{M}$ حيث : $\vec{M} = ٧$ سم.

الوحدة 3

مثال ٨

١، ب، ج، د، هـ خمس نقاط تقع على خط مستقيم ومرتببة في اتجاه واحد حيث :
 ١ = ب = ٤٠ سم ، ج = ٦٠ سم ، د = ٨٠ سم ، هـ = ١٠٠ سم. أثرت
 قوى مقاديرها ٦، ٢، ٥، ٨، ٤ نيوتن في النقاط ١، ج، د، هـ، ب على الترتيب وفي
 اتجاه عمودي على \overrightarrow{AH} بحيث كانت القوى الثلاثة الأولى متحدة الاتجاه والقوتان الأخيرتان
 في الاتجاه المضاد. عيّن محصلة هذه القوى.

الحل



نفرض \vec{u} متجه وحدة في اتجاه القوى الثلاث الأولى

$$\therefore \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5$$

$$\therefore \vec{R} = 2\vec{u}$$

\therefore المحصلة مقدارها ٢ نيوتن وفي اتجاه القوى الثلاث

الأولى ونفرض أن خط عمل المحصلة يمر بالنقطة م $\Rightarrow \overrightarrow{AM}$

\therefore القياس الجبري لعزم المحصلة حول ١ = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ١

$$\therefore \text{عزم المحصلة حول ١} = 2 \times 80 - 4 \times 100 - 6 \times 80 + 5 \times 60 + 4 \times 100 = 280$$

$$= 280 \text{ ث كجم.سم}$$

\therefore المحصلة تعمل على الدوران حول ١ في اتجاه دوران عقارب الساعة

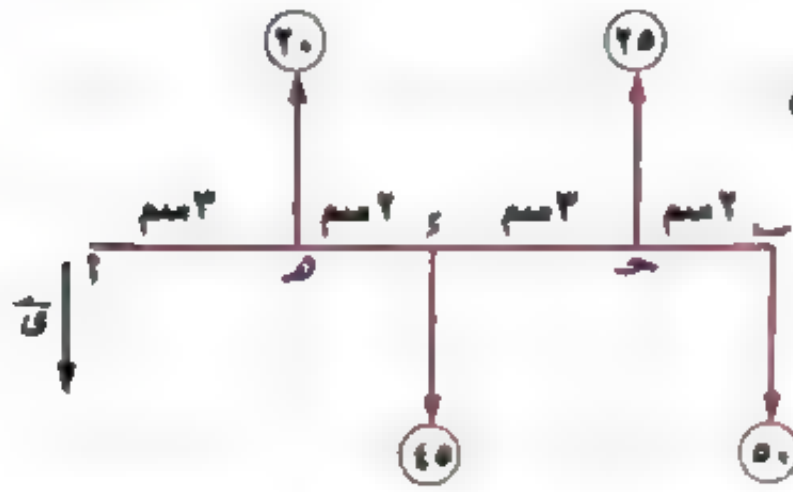
\therefore خط عمل المحصلة يجب أن يقع على اليمين من نقطة ١

$$\text{أي أن: } \overrightarrow{AM} \neq \overrightarrow{MA}, \quad \overrightarrow{AM} \neq \overrightarrow{MA}$$

$$\therefore -280 = M \times 2 - \text{أي } 280 = M \times 2 \quad \therefore M = 140 \text{ سم}$$

\therefore خط عمل المحصلة يمر بنقطة م $\Rightarrow \overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AM} \neq \overrightarrow{MA}$ بحيث $M = 140 \text{ سم}$

مثال ٩



الشكل المقابل يوضح قضيب أفقي أ ب ، أثرت ٤ قوى متوازية عمودية على القضيب كما هو موضح بالشكل مقاسه بالنيوتن. أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة.

الحل

نفرض \vec{R} متجه وحدة في اتجاه رأسى لأسفل

$$\therefore \vec{R} = -\vec{R}_1 + \vec{R}_2 - \vec{R}_3 + \vec{R}_4 = -\vec{R}_{50}$$

\therefore المحصلة مقدارها ٥٠ نيوتن وفي اتجاه رأسى لأسفل وبفرض أن خط عمل المحصلة يمر بنقطة تبعد مسافة x سم عن أ

، \therefore عزم المحصلة حول أ = مجموع عزوم القوى حول أ

$$\therefore -50 \times x = 10 \times 0 - 20 \times 2 + 45 \times 6 - 50 \times 8$$

$$\therefore x = 9.2 \text{ سم}$$

أي أن : خط عمل المحصلة يمر بنقطة على القضيب تبعد مسافة ٩,٢ سم من أ

مثال ١٠

إذا كانت أ ، ب ، ج ، د ، هـ خمس نقط على

استقامة واحدة ومرتبطة في اتجاه واحد

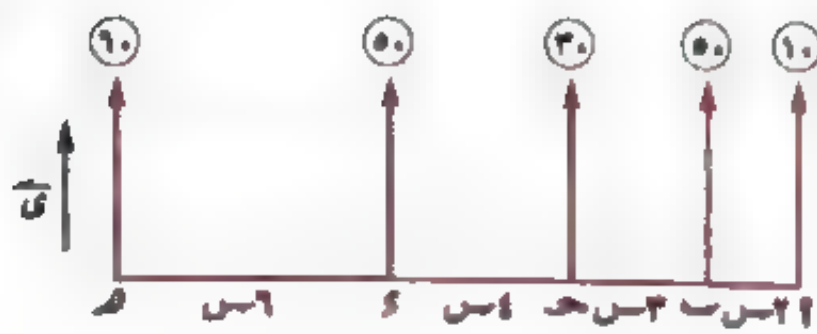
$$\text{بحيث : } \vec{A} : \vec{B} : \vec{C} : \vec{D} : \vec{E} = 6 : 4 : 3 : 2 : 1$$

وأثرت خمس قوى متوازية وفي نفس الاتجاه

مقاديرها ١٠ ، ٥٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٦٠ نيوتن في

النقط أ ، ب ، ج ، د ، هـ على الترتيب عمودية على \vec{A}

أثبت أن : المحصلة تقسم \vec{A} بنسبة ٧ : ٨



الحل

نفرض أن \vec{u} متجه وحدة في اتجاه القوى

$$A = 2 \text{ سم} ، B = 3 \text{ سم} ، C = 4 \text{ سم} ، D = 6 \text{ سم}$$

$$\therefore \vec{R} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 4\vec{u}_3 + 6\vec{u}_4$$

\therefore المحصلة مقدارها 20 نيوتن وفي نفس اتجاه القوى

ويفرض أن المحصلة تؤثر في نقطة $O \in \overline{AD}$

\therefore عزم المحصلة حول A = مجموع عزوم القوى حول A

$$\therefore -20 \times 4 = -2 \times 5 - 3 \times 6 - 4 \times 9 - 6 \times 15$$

$$\therefore 20 = 8 \text{ سم} \quad \therefore 20 = 15 - 8 = 7 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{A}{V} = \frac{8 \text{ سم}}{7 \text{ سم}} = \frac{8}{7}$$

\therefore المحصلة تؤثر في نقطة O التي تقسم AD من الداخل بنسبة 8 : 7

مثال ١١

A, B, C, D أربع نقط على استقامة واحدة ومرتببة في اتجاه واحد بحيث :

$A = 10 \text{ سم} ، B = 20 \text{ سم} ، C = 40 \text{ سم}$ أثرت قوتان مقدارهما 8 و 12 ثكجم في النقطتين A, D في اتجاه واحد عمودي على AD كما أثرت قوة قدرها 12 ثكجم في نقطة C في اتجاه مضاد لاتجاه القوتين السابقتين فإذا كان محصلة القوى الثلاث مقدارها 4 ثكجم وتعمل في اتجاه D وخط عملها يمر بالنقطة B فأوجد مقدار كل من : AD, CD

الحل

نعتبر \vec{u} متجه وحدة في اتجاه AD

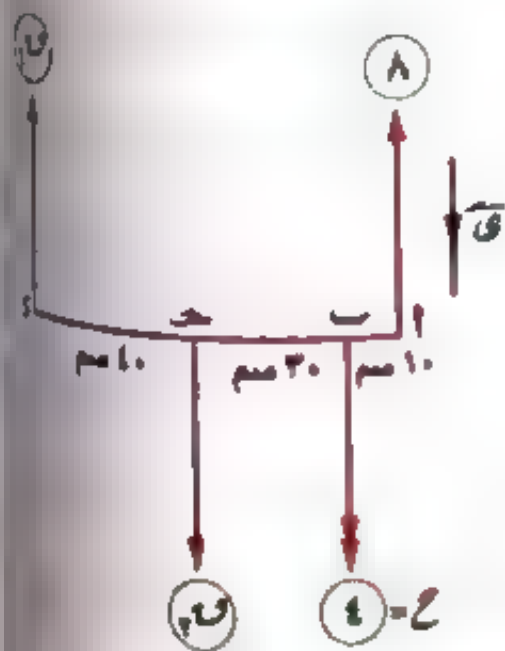
$$\therefore \vec{R} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = 8\vec{u}_1 - 12\vec{u}_2 + 12\vec{u}_3$$

$$= (8 - 12 + 12)\vec{u} = 8\vec{u}$$

$$\therefore 4 = 8 - 12 + 12$$

$$\therefore 12 = 12 - 12$$

(١)



∴ القياس الجبري لعزم المحصلة حول ω = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ω

$$92. = 2\lambda. + 7\varepsilon. = \gamma \cup \varepsilon. \therefore \quad \varepsilon. \times \gamma \cup - \lambda. \times \lambda. = \gamma. \times \varepsilon. \therefore$$

$\therefore u = 23 \text{ م. ث. كجم}$

ريالتعويض في (١) : $\therefore ١٧ = ١١ \text{ ث.كجم.}$

ملاحظة

إذا كان : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ // $\frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن :

① $\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ حيث q ثابت لا يساوى الصفر

ويكون : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ في اتجاه واحد إذا كان $\theta < \frac{\pi}{2}$.

۱، ۲، ۳ فی اتجاهین متضادین إذا كان $e > 0$.

(۲) ميل المتجه \vec{u} = ميل المتجه \vec{v}

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

مثال ۱۲

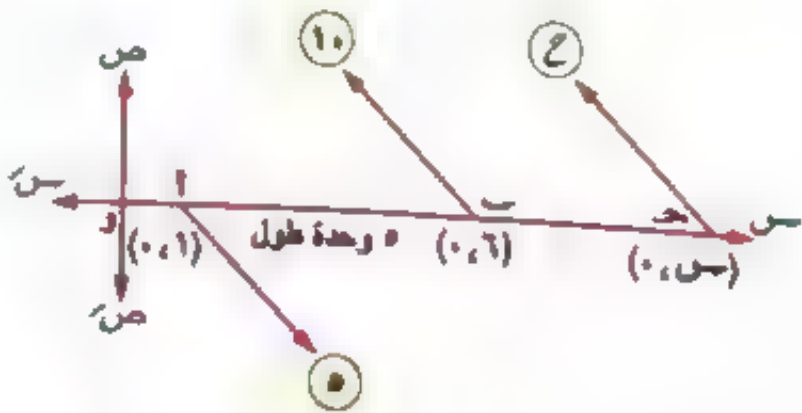
س، ص متجها وحدة متعامدان في اتجاهي محوري الإحداثيات و ح، و

، القوتان $\vec{Q}_1 = 3\vec{S} + 4\vec{V}$ ، $\vec{Q}_2 = -6\vec{S} + 8\vec{V}$ متوازيتان.

عَنْ قِيَمَةِ الثَّابِتِ l وَإِذَا أَثَرَتِ الْقُوتَانِ فِي النِّقْطَتَيْنِ $1(0, 1)$ ، $2(0, 6)$ عَلَى التَّرْتِيبِ

فلتوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع W

الحاصل



$$\frac{1}{2} // \frac{1}{2}$$

$$\overline{u} = \overline{u} \quad \therefore$$

$$\therefore \overrightarrow{S^2} + \overrightarrow{L^2} = \overrightarrow{J^2} \quad (-\overrightarrow{S^2} + \overrightarrow{S^2} + \overrightarrow{L^2} + \overrightarrow{L^2})$$

$$\therefore \overline{s^2} + \overline{r^2} = \overline{6} - \overline{s} + \overline{8} = \overline{1}$$

$$\therefore \vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} = \vec{OC} \times \vec{OA}$$

$$\therefore (4, -2) \times (0, 3) = (8, -6) \times (0, 6) + (4, -2) \times (0, 1)$$

$$\therefore 4 \times 3 = 48 + 4 \times 3 \quad \therefore 11 = 3$$

\therefore نقطة تقاطع خط عمل المحصلة مع \vec{OS} هي $(0, 11)$

معلومة إثرائية

إذا كان $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ هي القياسات الجبرية لعدة قوى متوازية تؤثر في النقط

$A_1 (x_1, y_1), A_2 (x_2, y_2), \dots, A_n (x_n, y_n)$ على الترتيب

فإن القياس الجبري للمحصلة $\vec{H} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$

وتؤثر المحصلة في نقطة $B (x, y)$ وباستخدام مبدأ ونظرية العزوم نجد أن :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n y_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}, \quad y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i}$$

فمثلاً : إذا أثرت القوى المتوازية التي مقاديرها ٥ ، ١١ ، ١٤ نيوتن في اتجاه واحد

في النقطة $A = (1, -2)$ ، $B = (0, 3)$ ، $C = (5, -1)$ على الترتيب.

أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى.

فإن المحصلة $\vec{H} = 5 + 11 + 14 = 30$ نيوتن

وبفرض أن نقطة تأثير المحصلة هي (x, y) فإن :

$$x = \frac{\sum_{i=1}^n y_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \frac{5 \times 14 + 0 \times 11 + 1 \times 5}{30} = \frac{75}{30} = 2.5$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \frac{1- \times 14 + 3 \times 11 + 2- \times 5}{30} = \frac{10}{30} = 0.3$$

\therefore نقطة تأثير المحصلة هي $(2.5, 0.3)$

مثال ١٣

تؤثر القوتان $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_3 = \vec{Q}_1$ ، $\vec{Q}_2 = \vec{Q}_3 - \vec{Q}_1 = \vec{Q}_2$ في النقطتين

أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٩) على الترتيب.

أوجد محصلة القوتين ونقطة تقاطع خط عملها مع \vec{AB}

الحل

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = \vec{Q}_1 - \vec{Q}_3 = \vec{Q}_1$$

نلاحظ أن $\vec{Q}_1 = \vec{Q}_2 = \vec{Q}_3$

أي أن : القوتين متوازيتان وفي نفس الاتجاه

نفرض المحصلة تؤثر في نقطة $H \in \vec{AB}$ حيث : $\frac{AH}{HB} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{2}{1}$

ومن قانون نقطة التقسيم

$$\therefore H = \left(\frac{2 \times 1 + 9 \times 2}{1 + 2}, \frac{1 \times 1 + 4 \times 2}{1 + 2} \right) = (7, 2)$$

حل آخر :

بفرض أن إحدى نقط تأثير المحصلة هي $H (س, ص)$ $\exists \vec{AH} \in \vec{AB}$ فإن :

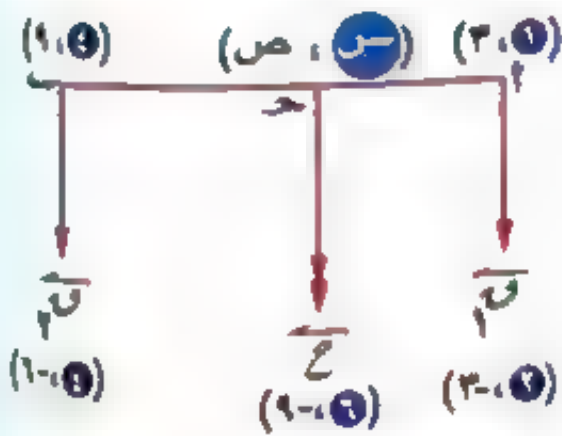
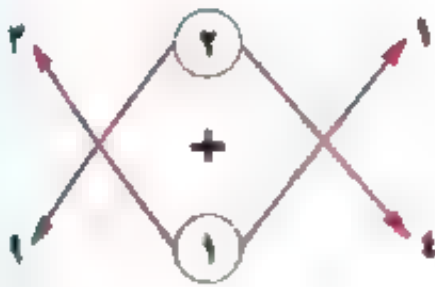
$$6 \times س = 2 \times 4 + 1 \times 9$$

$$\therefore س = 3$$

$$9 \times ص = 2 \times 2 - 1 \times 6$$

$$\therefore ص = 7$$

\therefore نقطة تقاطع المحصلة \vec{Q} مع \vec{AB} هي $(7, 2)$



على محصلة القوى المتوازية المستوية / اختبار تفاعلي



من أسئلة الكتاب المدرسي

أولاً : تمارين على محصلة قوتين متوازيتين

١ إذا كانت \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه تؤثران في النقطتين أ ، ب حيث $\text{أب} = ٥٧$ سم وكان $\vec{F}_1 = ٢٣$ نيوتن ، $\vec{F}_2 = ١٥$ نيوتن فأوجد محصلة هاتين القوتين.
 « ٢٨ نيوتن ، تبعد نقطة تأثيرها عن أ مسافة $\frac{١}{٢} ٢٢$ سم »

٢ (١٩٨٨م) \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه تؤثران في النقطتين أ ، ب حيث : $\text{أب} = ١٢,٥$ سم فإذا كان : $\vec{F}_1 = ٨٠$ نيوتن ، $\vec{F}_2 = ٣٠$ نيوتن فأوجد محصلة هاتين القوتين.
 « ٥٠ نيوتن ، نقطة تأثيرها تبعد عن أ مسافة ٧,٥ سم »

٣ قوتان متوازيتان مقداراهما ٣٠ ، ٧٠ نيوتن تؤثران في نقطتين أ ، ب حيث :
 أ ب = ٢٠٠ سم ، أوجد محصلة القوتين وبعدها نقطة تأثيرها عن أ إذا كانت القوتين :
 ① في اتجاه واحد. ② في اتجاهين متضادين.

« ١٠٠ نيوتن ، ١٤٠ سم ، ٤٠ نيوتن ، ٣٥٠ سم »

٤ إذا كان \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 قوتين متوازيتين متضادتين في الاتجاه وتؤثران في النقطتين أ ، ب وكانت \vec{H} محصلتهما تؤثر في نقطة ح \exists أ ب عما يأتي :

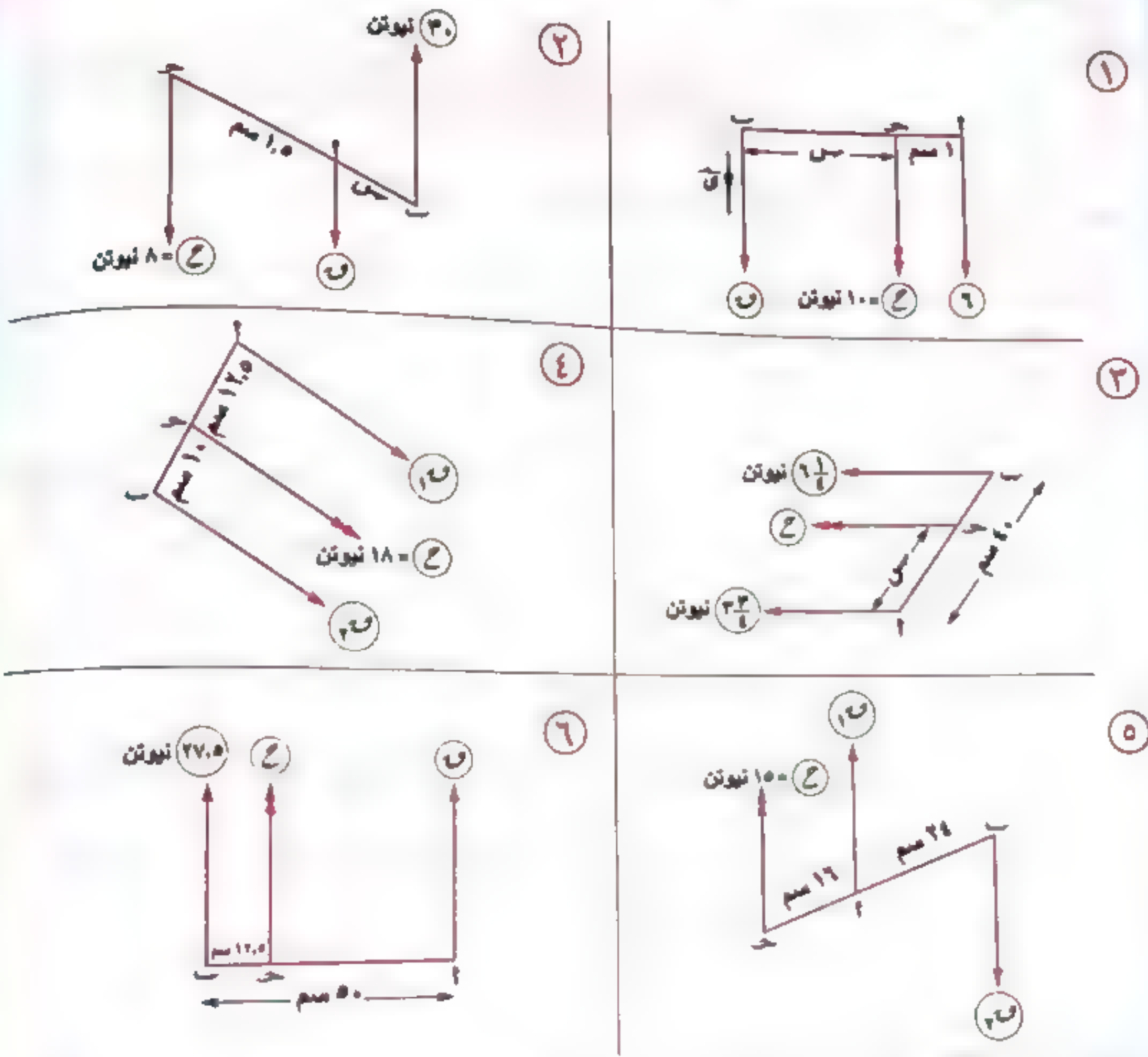
① $\vec{F}_1 = ١٥$ نيوتن ، $\vec{F}_2 = ٢٠$ نيوتن ، $\text{أح} = ٧٠$ سم

أوجد : \vec{F}_1 ، \vec{F}_2

② $\vec{F}_1 = ٦$ نيوتن ، $\text{أح} = ٢٤$ سم ، $\text{أب} \neq \text{أح}$ ، $\text{أب} = ٥٦$ سم

أوجد : \vec{F}_1 ، \vec{F}_2

في كل مما يأتي عيّن مقادير القوى والأبعاد المجهولة الموضحة في الأشكال المرسومة والتي كل منها يبين قوتين متوازيتين ومحصلتهما \vec{C} :

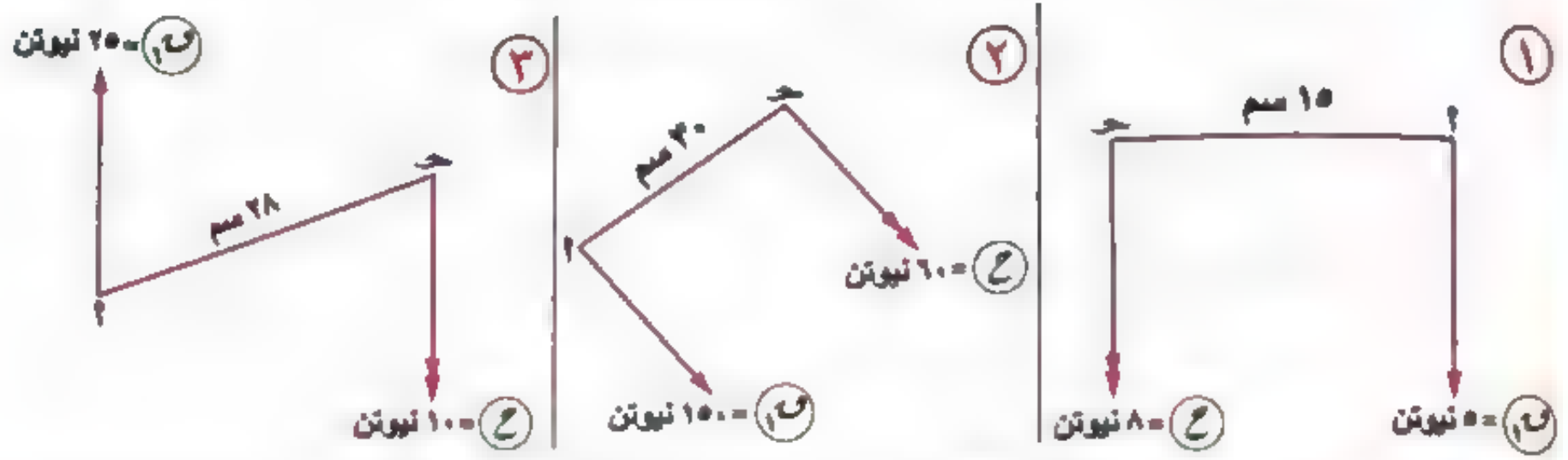


٦. قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه مقدارهما ٩ ، ١٥ نيوتن تؤثران في النقطتين أ ، ب حيث أ ب عمودي على خط عمل القوتين فإذا كان خط عمل المحصلة يبعد ٩ متر عن أ أوجد طول : أ ب
م ٣,٦

٧. إذا كانت محصلة القوتين المتوازيتين ٧ \vec{C} ، ٥ \vec{C} نيوتن تؤثر في نقطة تبعد $\frac{1}{3}$ متر عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطي عمل القوتين.
م ٤

٨. إذا كانت محصلة القوتين ٩ \vec{C} ، ٧ \vec{C} تؤثر في نقطة تبعد $\frac{1}{4}$ سم عن خط عمل القوة الصغرى. أوجد المسافة بين خطي عمل القوتين.
م ١

٩ في كل مما يأتي الشكل المرسوم يوضح معياري قوتين متوازيتين \vec{P} ، \vec{Q} ومحصلتها \vec{R} عني \vec{P} :



١٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كانت القوتان \vec{P} ، \vec{Q} متوازيتين وفي اتجاهين متضادين وكان : $\vec{P} = 14$ نيوتن ، $\vec{Q} = 10$ نيوتن فإن مقدار محصلتهما = نيوتن.

- (أ) 24 (ب) 4 (ج) 140 (د) 1,4

٢ قوتان متوازيتان متحدتا الاتجاه مقدار إحداهما ضعف مقدار الأخرى ومقدار محصلتهما = 39 نيوتن فإن مقدار أصغرهما = نيوتن.

- (أ) 19,5 (ب) 39 (ج) 26 (د) 13

٣ \vec{P} ، \vec{Q} قوتان متوازيتان محصلتهما \vec{R} إذا كان : $\vec{P} = 8$ نيوتن ، $\vec{Q} = 11$ نيوتن فإن : \vec{P} = نيوتن.

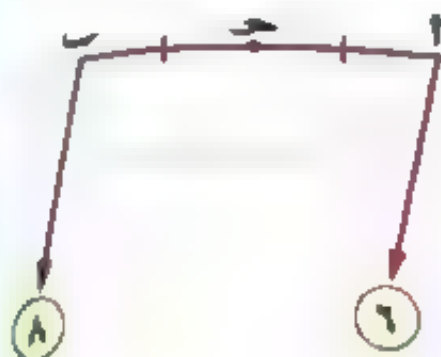
- (أ) 3 (ب) 19 (ج) 16 أو 22 (د) 19 أو 3

٤ إذا كانت : $\vec{P} // \vec{Q}$ وفي اتجاه واحد حيث : $\vec{P} = 50$ ثجم ، $\vec{Q} = 60$ ثجم والبعد بينهما 44 سم فإن بُعد \vec{R} عن \vec{P} = سم.

- (أ) 16 (ب) 18 (ج) 20 (د) 24

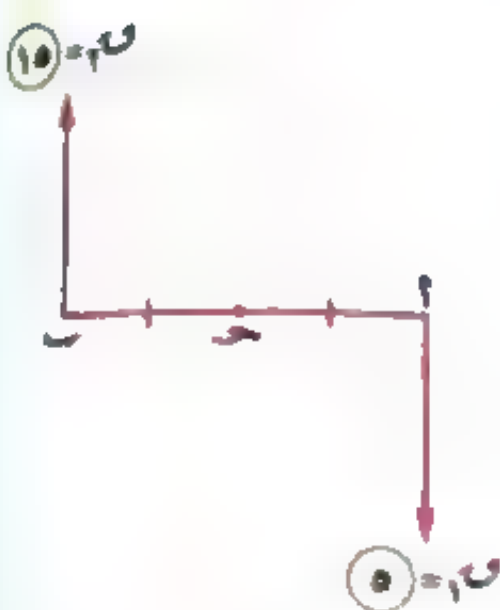
٥ قوتان متوازيتان مقدارهما \vec{P} ، \vec{Q} تؤثران في نفس الاتجاه ومقدار محصلتيهما \vec{R} فإن : \vec{R}

- (أ) أكبر من \vec{P} (ب) أقل من \vec{P}
(ج) تساوي $\vec{P} - \vec{Q}$ (د) تساوي $\vec{P} - \vec{Q}$



٦ في الشكل المقابل :
قوتان F_1 ، F_2 متوازيتان تؤثران في نقطتين A ، B
وكانت C منتصف AB فإن محصلة القوتين تؤثر
في نقطة E \exists AB حيث

- (أ) $E \exists$ AB
(ب) $E \exists$ AB
(ج) E هي نفس C
(د) $E \exists$ AB ، $E \nexists$ AB



٧ في الشكل المقابل :
قوتان F_1 ، F_2 متوازيتان تؤثران في نقطتين A ، B
وكانت C منتصف AB فإن محصلة القوتين تؤثر في
نقطة E \exists AB حيث

- (أ) $E \exists$ AB
(ب) $E \exists$ AB
(ج) E هي نفس C
(د) $E \exists$ AB ، $E \nexists$ AB

٨ قوتان متوازيتان ويعملان في نفس الاتجاه مقدارهما F_1 ، F_2 وتؤثران في النقطتين A ، B على الترتيب حيث $AB = 60$ سم فإن المحصلة تؤثر في نقطة C \exists AB حيث $AC =$ سم.

- (أ) ٣٦ (ب) ٤٠ (ج) ٤٥ (د) ٥٠

٩ إذا كانت H هي محصلة القوتان المتوازيتان F_1 ، F_2 وكان : $F_1 > F_2 > F_3$ فإن :

- (أ) F_1 ، F_2 في نفس الاتجاه.
(ب) F_1 ، F_2 متضادان في الاتجاه.
(ج) H في اتجاه F_1
(د) $H = F_1 - F_2$

١٠ إذا كانت H هي محصلة القوتين المتوازيتين $F_1 = 20$ ، $F_2 = 30$ نيوتن وكانت $H = 10$ نيوتن فإن

- (أ) $F_1 = 20$ نيوتن وتعمل عكس اتجاه القوة $F_2 = 30$ نيوتن.
(ب) $F_1 = 20$ نيوتن وتعمل في نفس اتجاه القوة $F_2 = 30$ نيوتن.
(ج) $F_1 = 40$ نيوتن وتعمل عكس اتجاه المحصلة.
(د) $F_1 = 40$ نيوتن وتعمل في نفس اتجاه القوة $F_2 = 30$ نيوتن.

١١) إذا كانت \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 قوتين متوازيتين تؤثران في النقطتين ١ ، ٢ حيث $\vec{F}_1 = 20$ ث.كجم ، $\vec{F}_2 < \vec{F}_1$ وكانت محصلتهما \vec{R} مقدارها ١٠ ث.كجم وتؤثر في نقطة $\vec{A} \in \overline{12}$ حيث $\vec{A} = 90$ سم فإن : $\vec{F}_2 = \dots\dots\dots$

- (أ) ٣٠ سم. (ب) ٤٥ سم. (ج) ٦٠ سم. (د) ١٢٠ سم.

١٢) (دور أول ٢٠١٧) إذا كانت : \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 قوتين متوازيتين وفي اتجاهين متضادين وكانت $\vec{F}_1 = 7$ نيوتن ، $\vec{F}_2 = 9$ نيوتن وكانت المحصلة تبعد عن القوة الثانية بمقدار ٢٥ سم. فإن البعد بين القوتين يساوي سم.

- (أ) ١٠ (ب) ١٦ (ج) ٢٥ (د) ٧٠

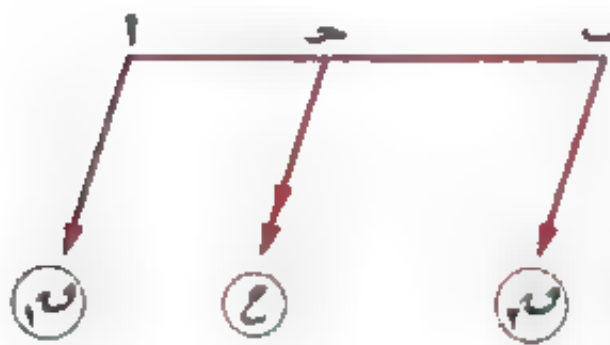


١٣) (دور أول ٢٠١٩) في الشكل المقابل :

إذا كان : \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 قوتان متوازيتان في نفس الاتجاه تؤثران عند ١ ، ٢ على الترتيب ، محصلتهما \vec{R} ، تؤثر عند نقطة $\vec{A} \in \overline{12}$ حيث $\vec{F}_1 = 8$ نيوتن ، $\vec{R} = 13$ نيوتن ، $\vec{A} = 10$ سم

فإن : $\vec{F}_2 = \dots\dots\dots$ سم

- (أ) ١٦ (ب) ١٣ (ج) ٢٦ (د) ٦



١٤) (دور ثان ٢٠١٩) في الشكل المقابل :

\vec{F}_1 ، \vec{F}_2 ، قوتان متوازيتان في نفس الاتجاه تؤثران عند ١ ، ٢ على الترتيب ، محصلتهما \vec{R} تؤثر عند نقطة $\vec{A} \in \overline{12}$ ، إذا كانت $\vec{F}_1 = 6$ نيوتن ، $\vec{A} = 24$ سم ، $\vec{A} = 56$ سم فإن :

- (أ) $\vec{F}_1 = 8$ نيوتن ، $\vec{R} = 14$ نيوتن (ب) $\vec{F}_1 = 24$ نيوتن ، $\vec{R} = 22$ نيوتن
(ج) $\vec{F}_1 = 22$ نيوتن ، $\vec{R} = 38$ نيوتن (د) $\vec{F}_1 = 8$ نيوتن ، $\vec{R} = 2$ نيوتن

١٥) قوتان متوازيتان \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 ومتحدتا الاتجاه مقدار محصلتهما ٢٥ نيوتن وتؤثر في نقطة تبعد ٤ سم عن القوة الأولى و ٦ سم عن القوة الثانية فإن : $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \dots\dots\dots$ نيوتن.

- (أ) ٢٠ (ب) ١٥ (ج) ١٠ (د) ٥

١١ قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٢٥٠ نيوتن وإحدى القوتين مقدارها ١٥٠ نيوتن وخط عملها يبعد ٤٠ سم عن خط عمل المحصلة. أوجد القوة الثانية وكذا البعد بين القوتين إذا كانت القوة المعلوم والمحصلة تعملان :

- ① في اتجاه واحد. ② في اتجاهين متضادين.

١٠٠٠ نيوتن ، ١٠٠ سم ، ٤٠٠ نيوتن ، ٢٥ سم.

١٢ قوتان متوازيتان \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 مقدار الأولى ٥٠ نيوتن ومقدار محصلتهما ٧٥ نيوتن والبعد بين خطي عمل القوة الأولى والمحصلة ٢٥ سم. عيّن مقدار واتجاه وخط عمل \vec{F}_2 إذا كان :

- ① \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 في اتجاه واحد. ② \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 في اتجاهين متضادين.

٢٥٠ نيوتن ، ٧٥ سم ، ١٢٥ نيوتن ، ١٥ سم.

١٣ قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٤٠ نيوتن وإحدى القوتين مقدارها ٨٠ نيوتن وخط عملها يبعد عن خط عمل المحصلة بمقدار ٣٠ سم. أوجد القوة الثانية والبعد بين خطي عمل القوتين إذا كانت المحصلة والقوة المعلوم تعملان :

- ① في اتجاه واحد. ② في اتجاهين متضادين.

٤٠٠ نيوتن ، ٣٠ سم ، ١٢٠ نيوتن ، ١٠ سم.

١٤ قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٣٥٠ نيوتن ومقدار إحدى القوتين ٥٠٠ نيوتن وتعمل على بُعد ٥١ سم من المحصلة. أوجد القوة الثانية والبعد بين خطي عمل القوتين إذا كانت القوة المعلوم والمحصلة تعملان :

- ① في اتجاه واحد. ② في اتجاهين متضادين.

١٥٠٠ نيوتن ، ١١٩ سم ، ٨٥٠ نيوتن ، ٢١ سم.

١٥ (دور اول ١٩٩٥) قوتان متوازيتان مقدارهما ١٥ ، \vec{F}_1 نيوتن حيث $\vec{F}_2 < ١٥$ وتؤثران في النقطتين ١ ، ٢ على الترتيب ، إذا كان مقدار المحصلة يساوي ٥ نيوتن وتؤثر في نقطة $\vec{F}_1 \vec{F}_2$ حيث : $\vec{F}_1 = ٤٥$ سم فأوجد : ١- ٢-

١٥٠ سم.

الدرس الاول

١٦ قوتان متوازيتان أصغرهما ٢٠ نيوتن وتؤثر في الطرف أ عمودياً على قضيب خفيف أـ والكبرى تؤثر في الطرف الآخر ب فإذا كان مقدار محصلتهما ١٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن الطرف ب بمقدار ٩٠ سم ، فما طول القضيب ؟
« ٢٠ سم »

١٧ قوتان متوازيتان متحدتان في الاتجاه والبعد بين خطي عملهما ٢٠ سم فإذا كان مقدار محصلتهما يساوي ٥٠ نيوتن ويبعد خط عملها عن خط عمل ق مسافة ٤ سم ، أوجد مقدار كل من القوتين.
« ٤٠ ، ١٠ نيوتن »

١٨ قوتان متوازيتان متضادتان في الاتجاه مقدارهما ق ، ق حيث : ق < ق تؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك فإذا كان : أ = ٤٠ سم ومقدار محصلتهما ٥٤ ثقل جرام وتؤثر في نقطة ح \Rightarrow أـ حيث : ب = ٦٠ سم.
أوجد كلاً من : ق ، ق
« ٨١ ، ٢٧ ثقل جرام »

١٩ (دور اول ١٩٩١) ق ، ق قوتان متوازيتان ومتضادتان في الاتجاه تؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب ، ق < ق إذا كانت محصلة ق ، ق قوة معيارها ٩٠ ثقل كجم وتؤثر في النقطة ح \Rightarrow أـ حيث : أ = ٢٦ سم ، أ = ١٦ سم.
فأوجد : ق ، ق
« ١٢٠ ، ٤٠ ثقل كجم »

٢٠ قوتان متوازيتان تؤثران في نقطتين أ ، ب فإذا كانت محصلتهما = ٢٠ نيوتن وتؤثر في نقطة ح \Rightarrow أـ حيث : أ = ٤٠ سم ، أ = ١٠ سم. أوجد مقدار كل من القوتين :
① إذا كانتا في اتجاه واحد. ② إذا كانتا في اتجاهين متضادين.

« ١٥ ، ٥ ، ٢٥ ، ٥ نيوتن »

٢١ أ ، ب ، ح ثلاث نقط على استقامة واحدة حيث : أ = ٦٠ سم ، ب = ٤٠ سم ، أثرت قوتان متوازيتان في النقطتين أ ، ب فإذا كان مقدار محصلتهما = ٢٤ نيوتن وتؤثر في نقطة ح فأوجد مقدار كل من القوتين.
« ١٦ ، ١٨ ، ١٦ ، ٤٠ نيوتن »

٢٢ قوتان متوازيتان تؤثران في نقطتين أ ، ب حيث : أ = ١٠٠ سم ، وتؤثر محصلتهما في نقطة ح \Rightarrow أـ ، فإذا كانت القوتان في اتجاه واحد فإن : ب = ٢٥ سم ، وإذا كانتا متضادتين في الاتجاه فإن المحصلة = ١٠ نيوتن. أوجد مقدار كل من القوتين. « ٥٠ ، ١٥ نيوتن »

٢٣ قوتان متوازيتان ومتحدتا الاتجاه مقدارها ٥ ، ٨ نيوتن تؤثران في نقطتين أ ، ب حيث : $AB = ٢٩$ سم. إذا اضيف للقوة الأولى قوة أخرى مقدارها ٧ في نفس الاتجاه فإن المحصلة تتحرك ٨ سم. أوجد : ٧

٢٤ قوتان متوازيتان وفي اتجاه واحد مقدارهما ٧ ، ٧ تؤثران في النقطتين أ ، ب فإذا تحركت إحداهما موازية لنفسها مسافة قدرها ٣ سم على المستقيم \overrightarrow{AB} فثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{1}{4}$ سم في نفس الاتجاه.

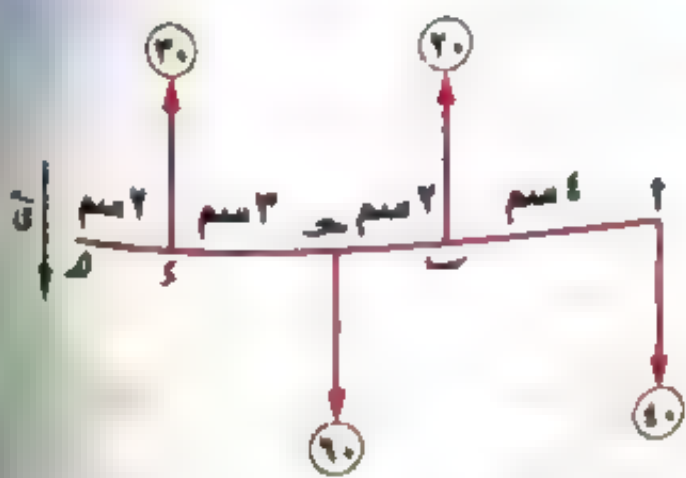
٢٥ قوتان متوازيتان وفي نفس الاتجاه مقدارهما ٧ ، ٢ تؤثران في نقطتين أ ، ب إذا تحركت القوة ٢ موازية نفسها في اتجاه \overrightarrow{AB} مسافة ٣ سم. أثبت أن محصلة القوتين تتحرك في نفس الاتجاه مسافة قدرها $\frac{2}{3}$ سم

٢٦ قوتان متوازيتان في اتجاهين متضادين مقدارهما ٥ ، ٩ نيوتن تؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب من جسم متماسك. فإذا انتقلت نقطة تأثير القوة ٩ نيوتن مسافة قدرها ٣ سم على الشعاع \overrightarrow{AB} بحيث تظل هذه القوة موازية للقوة الأخرى. أثبت أن نقطة تأثير محصلتها تنتقل مسافة $\frac{9}{4}$ سم

٢٧ قوتان متوازيتان وفي اتجاه واحد مقدارهما ٧ ، ٧ تؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب. فإذا تحركت القوة ٧ موازية لنفسها مسافة قدرها ٣ سم على الشعاع \overrightarrow{AB} فثبت أن محصلتهما تتحرك مسافة قدرها $\frac{٧}{٧+٧}$ سم في نفس الاتجاه.

تأنيبا

١ في الشكل المقابل :



أ ، ب ، ج ، د ، هـ خمس نقط تقع على خط مستقيم أفقي واحد أثرت القوتان ٢٠ ، ٢٠ نيوتن رأسياً لأعلى عند النقطتين ب ، د وأثرت القوتان ٤٠ ، ٦٠ نيوتن رأسياً لأسفل عند النقطتين أ ، ج أوجد مقدار واتجاه ونقطة تأثير المحصلة.

$$٥٠٠ \text{ ني } ، ٢٠٠ \text{ سم} = ٢٠٠ \text{ سم} ، ٠ \text{ ني}$$

٢ ثلاث قوى متوازية ومتحدة الاتجاه مقاديرها ٥ ، ٧ ، ٩ ثقل كيلوجرام وبالترتيب حسب موضعها والبعد بين خطى عمل القوتين الأولى والثانية ٢٠ سم وبين خطى عمل الثانية والثالثة ٤٠ سم عيّن محصلة القوى الثلاث.

« $\vec{c} = ٢١$ ثقل كجم ، والبعد بينهما وبين خط عمل القوة الأولى = ٤٠ سم »

٣ ١ ، ب ، ج ثلاث نقط تقع على مستقيم أفقى حيث : $\vec{a} = ١$ متر ، $\vec{b} = ٣$ متر ، $\vec{c} = ١$ متر أثرت القوى التى مقاديرها ٢ ، $\frac{١}{٢}$ نيوتن رأسياً لاسفل فى النقطتين ١ ، ج على الترتيب كما أثرت قوة مقدارها ٤ نيوتن فى نقطة ب رأسياً لأعلى. أوجد مقدار واتجاه المحصلة وبُعد نقطة تأثيرها عن نقطة ١ « $\frac{١}{٢}$ نيوتن ، $\frac{٥}{٢}$ م »

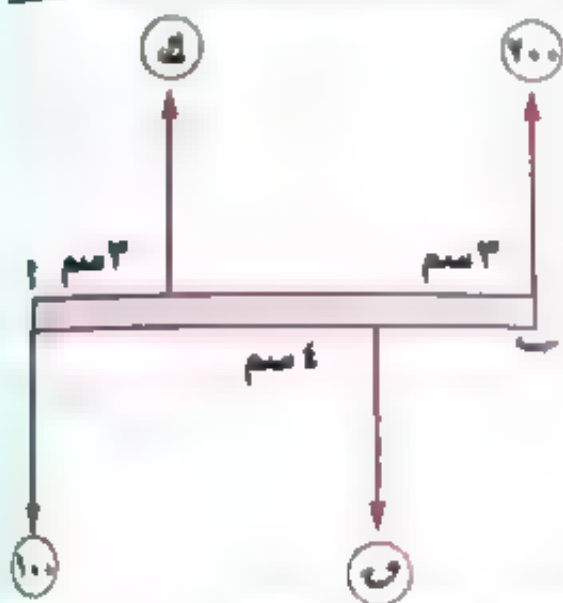
٤ أربع قوى متوازية ومتحدة فى الاتجاه مقاديرها ٢ ، ٤ ، ١ ، ٢ ث كجم تؤثر عند النقطة ١ ، ب ، ج ، د على الترتيب على خط مستقيم واحد عمودى على اتجاه القوى. عيّن محصلة هذه القوى علماً بأن : $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = ١٠٠$ سم ، $\vec{d} = \vec{b} = \vec{c}$ بحيث : $\vec{d} = ١٥٠$ سم. « $\vec{c} = ١٠$ ث كجم وتعمل على بُعد ١٢٠ سم من ١ »

٥ (١٩٨٩م) ١ ، ب ، ج ، د أربع نقط مختلفة على مستقيم واحد بحيث : $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \vec{d} = ٢٠$ سم أثرت قوتان مقداراهما ٨ ، ٩ ثقل كجم فى النقطتين ١ ، د بالترتيب فى اتجاه واحد عمودى على \vec{a} ، كما أثرت قوتان مقداراهما ٤ ، ٧ ثقل كجم فى النقطتين ب ، ج على الترتيب فى اتجاه مضاد لاتجاه القوتين السابقتين. عيّن محصلة مجموعة هذه القوى. « $\vec{c} = ٦$ ثقل كجم ، $\vec{d} = ٤٥$ سم »

٦ ١ ، ب ، ج ، د أربع نقط تقع على خط مستقيم واحد حيث : $\vec{a} = \vec{b} = ٢٢$ سم ، $\vec{c} = ٤٠$ سم ، $\vec{d} = ٨$ سم أثرت القوتان المتوازيتان ٨ ، ١٠ نيوتن فى ١ ، ج على الترتيب فى اتجاه عمودى على \vec{a} وأثرت القوتان ٧ ، ٢ نيوتن فى ب ، د فى اتجاه مضاد للقوتين عند ١ ، ج عيّن محصلة هذه المجموعة وبُعد نقطة تأثيرها عن ١ « $\vec{c} = ٨$ نيوتن ، $\vec{d} = ٢٢$ سم »

٧ **١** ، **ب** ، **ج** ، **د** ، **هـ** نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث :
أ = **ب** = ٤ سم ، **ب** = **ج** = ٦ سم ، **ج** = **د** = ٨ سم ، **د** = **هـ** = ١٠ سم. أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٨٠ ، ٤٠ ث. كجم فى النقاط **أ** ، **ج** ، **د** ، **هـ** ، **ب** على الترتيب فى اتجاه عمودى على **أ** وفى اتجاه عمودى على **أ** بحيث كانت القوى الثلاث الأولى متحدة الاتجاه ، القوتان الأخريان فى الاتجاه المضاد. عيّن محصلة المجموعة.
ج = ٢٠ ث. كجم ، **م** = ١٢ سم حيث : $\vec{M} \equiv \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$

٨ إذا كانت **ج** ، **د** ، **هـ** ، **ب** ، **أ** بحيث : **أ** = **ب** = ١ : ٣ : ٥ : ٧ أثرت قوى متوازية وفى نفس الاتجاه ومتساوية فى المقدار فى النقاط **أ** ، **ج** ، **د** ، **هـ** ، **ب** فى اتجاه عمودى على **أ** برهن أن خط عمل المحصلة تقسم **أ** بنسبة ٣ : ٥



الشكل المقابل يوضح قضيب خفيف **أ** - **ب** أثرت عليه القوى المتوازية الموضحة بالشكل فإذا كانت مقدار المحصلة ٣٠٠ نيوتن وتعمل لأعلى وتؤثر فى نقطة على القضيب تبعد ٤ سم من **أ** أوجد : **ج** ، **د**

٢٥٠٠ ، ٥٥٠ نيوتن

٩ **أ** ، **ب** ، **ج** ، **د** أربع نقط \equiv مستقيم أفقى واحد ومرتبته فى اتجاه واحد بحيث :
أ = **ب** = ٢ سم ، **ب** = **ج** = ٤ سم ، **ج** = **د** = ٤ سم أثرت القوى المتوازية التى مقاديرها ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ثقل كجم عمودية على **أ** وعند النقاط **أ** ، **ب** ، **ج** ، **د** وفى اتجاه واحد فإذا كانت المحصلة تؤثر عند **م** $\vec{M} \equiv \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ حيث : **م** = ٨ سم. أوجد قيمة **ج** ومحصلة هذه القوى.

٢٥٠ ث. كجم ، ٢٧ ث. كجم

١٠ **أ** ، **ب** ، **ج** ، **د** ، **هـ** خمس نقط \equiv مستقيم واحد ومرتبته فى اتجاه واحد بحيث :
أ = **ب** = ٢ سم ، **ب** = **ج** = ٤ سم ، **ج** = **د** = ٢ سم ، **د** = **هـ** = ١٠ سم أثرت القوى ٦ ، ٢ ، ٢ ، ٨ ، ٧ نيوتن فى النقاط بالترتيب بحيث كانت عمودية على **أ** وكانت القوتان ٨ ، ٦ فى اتجاه واحد والقوتان ٢ ، ٢ فى الاتجاه المضاد ، فإذا كانت محصلة هذه القوى تؤثر عند نقطة **هـ** $\vec{M} \equiv \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E}$ حيث **هـ** = ٥ سم. فأوجد مقدار واتجاه كل من القوة **ج** ، المحصلة **ح**
ج = ٢ ، ٦ نيوتن فى اتجاه القوتين ٢ ، ٢ ، **ح** = ٥ ، ٤ نيوتن فى اتجاه القوتين ٨ ، ٦

الدرس الاول

١٢ ثلاث قوى متوازية مستوية مقاديرها ٨ ، ٧ ، ٥ ث. كجم تؤثر في النقط ٩ ، ١٠ ، ١١ على الترتيب من مستقيم معلوم حيث : $\overline{٩١} = ١٢$ سم ، $\overline{١٠٩} = ١٢$ سم ، $\overline{١١١٠} = ١٢$ سم فإذا كانت القوتان الأولى والثانية متضادتين في الاتجاه وكانت محصلة القوى الثلاث معيارها ٤ ث. كجم في اتجاه القوة الثانية وخط عملها يقطع $\overline{٩١}$ في نقطة ٤ حيث : $\overline{٤٩} = ٥٠$ سم فأوجد مقدار $\overline{١٠٤}$ وكذلك طول $\overline{١١٤}$. $\overline{١٠٤} = ٥٠$ ثقل كجم ، $\overline{١١٤} = ١١.٢$ سم .

١٣
١، ب، ح، د، هـ خمس نقاط في مستقيم أفقى واحد ومرتب في اتجاه واحد بحيث :
١٢ سم ، ب ح = ٤ سم ، ح د = ٦ سم ، د هـ = ٢ سم.
أثرت القوى ٤ ، ٥ ، ٨ نيوتن رأسياً لأسفل عند النقاط ١ ، ح ، هـ على الترتيب وأثرت
القوتان ٧ ، ٩ رأسياً لأعلى عند النقاط ب ، د على الترتيب. فإذا كانت محصلة
القوى = ٧ نيوتن وتؤثر عند نقطة هـ \Rightarrow ١ هـ حيث : ١ هـ = ١٠ سم وتعمل رأسياً لأسفل
فأوجد قيمتي : ٥ ، ٩

اختبر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كانت : \overline{u} ، \overline{v} قوتين متوازيتين : $\overline{u} = \overline{v} + \overline{w}$ ، $\overline{u} = \overline{v}$

..... = \overrightarrow{u} ، $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{6} - \overrightarrow{s} + \overrightarrow{8} - \overrightarrow{ص}$ فإن الثابت $h =$

$$Y = (A) \quad X = (B) \quad X = \frac{1}{2} (C) \quad X = (D)$$

٢) من بين مجموعات القوى التالية توجد قوتان متوازيتان وتعملان في اتجاهين متضادين هما

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{15}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (1)$$

$$(ب) \frac{1}{ص ۲} - \frac{1}{ص ۳} = \frac{1}{ص ۶} , \quad \frac{1}{ص ۴} + \frac{1}{ص ۶} = \frac{1}{ص ۳}$$

(ج) $\frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{2} = \frac{6}{6} - \frac{5}{6}$ ، $\frac{1}{2} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$

$$(د) \frac{1}{ص ۲} - \frac{1}{ص ۳} = \frac{1}{ص ۶} , \quad \frac{1}{ص ۴} + \frac{1}{ص ۶} = \frac{1}{ص ۳}$$

② إذا كانت : $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$ وفي اتجاهين متضادين فإن : $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} (د) \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{1}{\sqrt{a}} (ج) \quad \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}} (ب) \quad \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a}} (ا)$$

- ٤ إذا كان : $\vec{Q} // \vec{P}$ وكانت محصلتهما القوة \vec{R} بحيث :
 $\vec{Q} = \vec{P} - 9\text{ ص} + 12\text{ ص}$ ، $\vec{R} = -2\vec{Q}$ فإن : $\vec{Q} = \dots\dots\dots$
 (أ) $-15\text{ ص} + 20\text{ ص}$ (ب) $-3\text{ ص} + 4\text{ ص}$
 (ج) $2\text{ ص} - 4\text{ ص}$ (د) $15\text{ ص} - 20\text{ ص}$
- ٥ إذا كانت : $\vec{Q} // \vec{P}$ ، $\vec{Q} = \vec{P} - 2\text{ ص}$ ، $\|\vec{Q}\| = 4\text{ ص}$ ، $\vec{R} = 4\text{ ص}$ فإن : $\vec{R} = \dots\dots\dots$

- (أ) $4\text{ ص} - 8\text{ ص}$ (ب) $4\text{ ص} + 8\text{ ص}$ (ج) $2\text{ ص} - 4\text{ ص}$ (د) $2\text{ ص} + 4\text{ ص}$
 (أ) فقط (ب) فقط (ج) I ، II فقط (د) II ، III فقط

- ٦ إذا كان مقداراً قوتان متوازيتان تعملان في نفس الاتجاه هما $\frac{3}{4}\text{ ص}$ ، $\frac{5}{4}\text{ ص}$ نيوتن ومحصلتهما ٢ نيوتن فإن

- (أ) $3\text{ ص} = 5\text{ ص}$ (ب) $3\text{ ص} = 2\text{ ص}$
 (ج) $3\text{ ص} = 2\text{ ص}$ (د) $3\text{ ص} = \frac{1}{4}\text{ ص}$

- ٧ قوتان \vec{Q} ، \vec{P} متوازيتان وتعملان في نفس الاتجاه إذا بدلت مكانيهما فإن محصلتهما لا تغير مكانها فإن

- (أ) $\vec{Q} = \vec{P}$ (ب) $\vec{Q} = 2\vec{P}$
 (ج) $2\vec{Q} = \vec{P}$ (د) $\vec{Q} = \frac{1}{2}\vec{P}$

- ٨ في الشكل المقابل :

نقطة تأثير محصلة القوى

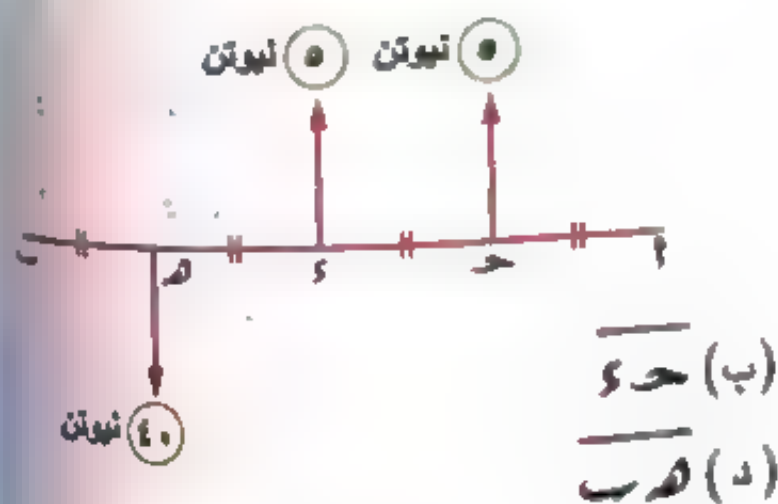
تنتمي إلى

(أ) \vec{AC}

(ب) \vec{AD}

(ج) \vec{AB}

(د) \vec{BC}



- ٩ \vec{Q} ، \vec{P} قوتان متوازيتان البعد بين خطي عمليهما = ١٠ سم وكان خط عمل محصلتهما يبعد عن خط عمل \vec{Q} بمقدار ١٢ سم فإن :
- (أ) \vec{Q} ، \vec{P} في نفس الاتجاه.
 (ب) \vec{Q} ، \vec{P} متضادان في الاتجاه.
 (ج) $\vec{R} = \vec{Q} - \vec{P}$
 (د) $\vec{R} = \vec{Q} + \vec{P}$

الدرس الأول

١٠) إذا كانت : $\overline{10}$ ، $\overline{20}$ قوتان بحيث $\overline{20} = 2 \overline{10}$ ومحصلتهما تبعد عن $\overline{10}$ مسافة ١٥ سم فإن بعد المحصلة عن $\overline{10}$ = سم.

- ٢٥ (ج) ١٢ (ا) ١٠ (ب) ٨ (د)

(۱۱) إذا كانت : \vec{u} ، \vec{v} قوتان تؤثران في نقطتين ۱ ، ۲ حيث $\vec{u} = -\vec{v}$ $\vec{u} = \vec{v}$ ومحصلاتهما تؤثر في نقطة $\exists \vec{a}$ فإن :

- (ب) $۲ : ۲ = ۱ : ۱$
(ج) $۲ : ۲ = ۱ : ۱$

١٢) قوتان متوازيتان في اتجاه واحد مقدارهما ١ و ٣ و تؤثران في النقطتين ٢ ، ٣ على الترتيب فإذا بدلت القوتان مكانيهما فإن محصلتهما تتحرك مسافة

- $$\hookrightarrow \frac{1}{x} \text{ (د)} \quad \hookrightarrow \frac{1}{y} \text{ (ز)} \quad \hookrightarrow \frac{1}{y} \text{ (ب)} \quad \hookrightarrow \frac{2}{x} \text{ (ا)}$$

(۱۳) إذا كان : $\overline{Q_1} // \overline{Q_2}$ ، $Q_1 < Q_2$ وكان مقدار محصلتهما $= E$ إذا كانتا في اتجاهين متضادين ومقدار محصلتهما $= H$ إذا كان لهما نفس الاتجاه

فان : =

- $$\frac{V}{V} \text{ (د)} \quad \frac{0}{V} \text{ (هـ)} \quad \frac{2}{V} \text{ (و)} \quad \frac{3}{V} \text{ (1)}$$

١٤) في الشكل المقابل :



أب حء مستطيل أثرت القوتان المتوازيتان

التي مقدارهما ١٩ ، ٢٠

فإن خط عمل المحصلة هو

- (پ) ح س

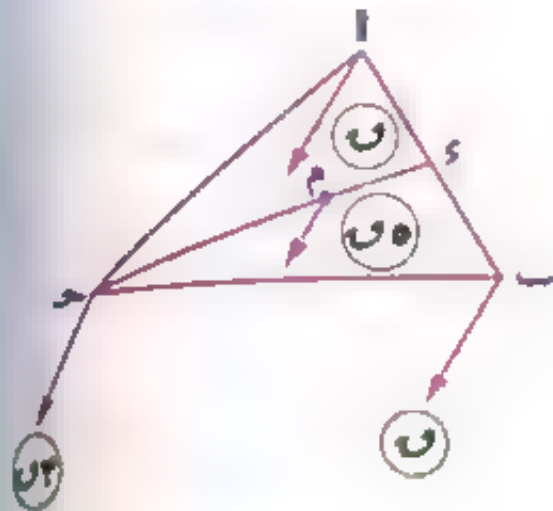
(ج) ۱۵) إذا كانت: $\vec{r}_1 = 2\vec{s} + \vec{v}$ تؤثر في $A(0, 2)$ ، $\vec{r}_2 = \vec{v} // \vec{r}_1$ حيث $\vec{r}_2 = 6\vec{s} - 2\vec{v}$ تؤثر في $B(0, 6)$ فإن نقطة تقاطع خط عمل \vec{r}_1 مع A

-
- (۱) (۴ ، ۰) (پ) (۸ ، ۰) (ج) (۲ ، ۰) (د) (۰ ، ۰)

١٦ قوتان متوازيتان في اتجاه واحد مقدارهما ٢ نيوتن ، ٢ نيوتن تؤثران في ١ ، ٢ على الترتيب بحيث كان : $\vec{a} = 5$ وحدة طول وانتقلت القوة ٢ في الاتجاه \vec{a} ثلاث وحدات طول وانتقلت القوة ٢ في الاتجاه \vec{a} وحدتين طول فإن مقدار المحصلة ينتقل في اتجاه مسافة وحدة طول.

(١) $\vec{a} = 1$ ، (ب) $\vec{a} = 1$ ، (ج) $\vec{a} = 2$ ، (د) $\vec{a} = 2$ ،

١٧ في الشكل المقابل :



١ ح مثلث ، م نقطة تلاقي متوسطات Δ $\vec{a} = 3$ ح

القوى ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ قوى متوازية وفي

اتجاه واحد تقع خطوط عملها في مستوى المثلث

فإذا كان طول المتوسط $\vec{a} = 30$ سم

فإن محصلة هذه القوى تؤثر في نقطة تبعد عن ح مسافة = سم.

(١) ١٤ (ب) ١٥ (ج) ١٦ (د) ٢٠

(دور أول ٢٠١٠) قوتان $\vec{a} = 1$ ، $\vec{b} = 2$ تؤثران عند النقطتين ١ ، ٢ على الترتيب في اتجاه عمودي على \vec{a} حيث $\vec{a} = 30$ سم وكانت محصلتهما $\vec{c} = 3 - 4 + 5$ ص

وتؤثر عند نقطة ح $\vec{a} \Rightarrow$ فإذا علمت أن $\vec{a} = 3 - 6 + 8$ ص فعين \vec{a} واحسب طول \vec{a}

$\vec{a} = 3 - 6 + 8$ ص ، $\vec{a} = 30$ سم

(دور أول ١٩٩٣) $\vec{a} = 1$ ، $\vec{b} = 2$ متجهان وحدة متعامدان في اتجاهي محوري الإحداثيات

وس ، وص والقوتان $\vec{a} = 2 + 3$ ص ، $\vec{b} = 3 - 6 + 8$ ص

متوازيتان. عين قيمة ١ وإذا أثرت القوتان في النقطتين (٠ ، ١) ، (٠ ، ٥) على الترتيب. فأوجد نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع وس

(٠ ، ٧) ، ١ -

تؤثر القوتان $\vec{a} = 3 - 6 + 8$ ص ، $\vec{b} = 3 - 6 + 8$ ص في النقطتين ١ (٠ ، ١) ، ٢ (٢ ، ١) على الترتيب.

أوجد محصلة القوتين وعين نقطة تقاطع خط عملها مع \vec{a} $\vec{a} = 3 - 6 + 8$ ص ، (٢ ، ٢) ، ١ -

الدرس الاول

إذا كانت القوتان \vec{P} و \vec{Q} $= -2\vec{s} + \vec{e}$ ، $\vec{P} = 8\vec{s} - 4\vec{v}$ متوازيتين. عين قيمة e وإذا أثرت \vec{P} في النقطة $(-2, 0)$ وأثرت \vec{Q} في النقطة $(4, 0)$ عين نقطة تقاطع خط عمل محصلتهما مع محور السينات وأوجد معادلة خط عمل المحصلة.

$$e = 10, (6, 0), s = 2 + v - 6 = -4$$

تؤثر القوتان المتوازيتان \vec{P} و $\vec{Q} = 2\vec{s} - 2\vec{v}$ ، \vec{P} في النقطتين $(1, 3)$ ، $(4, 9)$ على الترتيب فإذا كانت محصلة القوتين تؤثر في نقطة $(3, 7)$ فأوجد : \vec{P} ، $4\vec{s} - 6\vec{v}$.

قوتان متوازيتان تؤثران في نقطتين A ، B حيث : $A = 20$ سم ، فإذا كانت $\vec{P} = 6\vec{s} + 8\vec{v}$ وتؤثر في A وكانت $C = 5$ نيوتن وتؤثر في نقطة C ، $C \in AB$ فأوجد كلاً من : \vec{P} ، \vec{C} ، وطول AC في كل حالة.

$$\vec{P} = -2\vec{s} - 4\vec{v} , \vec{C} = 2\vec{s} + 4\vec{v} , A = 20 \text{ سم}$$

$$A, \vec{P} = -9\vec{s} - 12\vec{v} , \vec{C} = 2\vec{s} - 4\vec{v} , A = 60 \text{ سم}$$

أثرت القوى المتوازية \vec{P} و $\vec{Q} = -2\vec{s} + 6\vec{v}$ ، $\vec{P} = 3\vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{P} = 5\vec{s} - 10\vec{v}$ في النقطة $A(2, 3)$ ، $B(-2, 1)$ ، $C(-1, 2)$ على الترتيب. أوجد معادلة خط عمل محصلة هذه القوى. $12\vec{s} + 4\vec{v} + 31 = 0$

أثرت القوى المتوازية \vec{P} و $\vec{Q} = \vec{s} + \vec{m}$ ، $\vec{P} = 2\vec{s} - 10\vec{v}$ ، $\vec{P} = 5\vec{s} + 10\vec{v}$ عند النقط $A(3, 1)$ ، $B(2, 0)$ ، $C(2, 5)$ على الترتيب. أوجد قيمتي m ، n ، معادلة خط عمل محصلة هذه القوى. $5 - 2 + 10 + 21 = 0$

تؤثر القوى المتوازية التي مقاديرها 5 ، 8 ، 12 نيوتن في اتجاه واحد في النقط $A(2, -2)$ ، $B(0, 3)$ ، $C(4, -1)$ على الترتيب. أوجد نقطة تأثير محصلة هذه القوى. $(\frac{58}{10}, \frac{2}{10})$

١١ أ ب ح مثلث أثرت في رؤوسه ثلاث قوى متوازية ومتساوية في المقدار ومتحدة الاتجاه. أثبت أن خط عمل محصلتها يمر بنقطة تقاطع متوسطات المثلث.

١٢ أ ب ح د مربع تؤثر في رؤوسه أ ، ب ، ح ، د أربع قوى متساوية ومتوازية وفي اتجاه واحد. أثبت أن محصلة هذه القوى الأربع تمر بنقطة تقاطع قطري المربع.

مسائل بقيس مستويات عليا من التفكير

١٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كان : $\vec{u} // \vec{v}$ وتؤثران في النقطتين أ ، ب على الترتيب ومحصلتهما \vec{c} تؤثر في النقطة م $\vec{c} \ni \vec{a}$

أولاً : إذا كان : $\vec{c} < \vec{u} < \vec{v}$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $\vec{c} < \vec{u} < \vec{v}$ (ب) $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$

(ج) $\vec{c} = \vec{u} + \vec{v}$ (د) $\frac{\vec{c}}{\vec{u}} = \frac{\vec{v}}{\vec{u}}$

ثانياً : إذا كان : $\vec{u} < \vec{c} < \vec{v}$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $\vec{c} > \vec{u}$ (ب) $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$

(ج) $\vec{c} > \vec{v}$ (د) $\vec{c} + \vec{u} = \vec{v}$

ثالثاً : إذا كان : $\vec{u} < \vec{c} < \vec{v}$ ، $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $\frac{1}{\vec{u}} = \vec{c}$ (ب) $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$

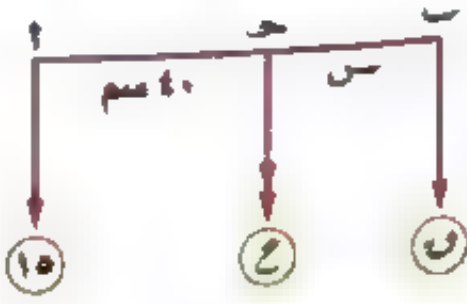
(ج) $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$ (د) $\vec{c} = \vec{u}$

رابعاً : إذا كان : $\vec{u} < \vec{c} < \vec{v}$ فأى العبارات الآتية غير صحيحة ؟

(أ) $\vec{c} > \vec{u}$ ، $\vec{c} > \vec{v}$ في اتجاهين متضادين (ب) $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$

(ج) $\vec{c} < \vec{u} < \vec{v}$ (د) $\vec{c} \ni \vec{a}$

الدرس الاول



٢) في الشكل المرسوم قوتان متوازيتان مقدارهما

١٥ ، ٢٠ نيوتن تؤثران في النقطتين ١ ، ٢ على الترتيب

ومحصولتيهما تؤثر في النقطة ٣ \Rightarrow أ ب بحيث كان

أ ح = ٤٠ سم ، ح ب = ٢٠ سم فإذا كانت ٢ بالنيوتن \Rightarrow [٢٠ ، ١٠]

فإن : ح بالسنتمترات \Rightarrow

(ب) [٩٠ ، ٦٠]

(١) [٦٠ ، ٢٠]

(د) [٨٠ ، ٤٠]

(ج) [٤٠ ، ٢٠]

١٤) من القوى المستوية المتوازية المتساوية مقدار كل منها = ٢ تؤثر في اتجاه يوازي المحور الصادي وهي بالتتالي متضادة الاتجاه وتؤثر أولها في الاتجاه الموجب للمحور الصادي وعلى بُعد منه = ٢ سم وكان البعد بين كل قوة والتالية لها = ٢ سم . فإذا كانت ٢ عددًا فرديًا . فاثبت أن المجموع الجبري لعزوم هذه القوى حول نقطة الأصل يساوي $(١ + ٢) \times ٢$

١٥) أ ب ح د هـ و شكل سداسي منتظم مركزه م ، \vec{MA} متجه وحدة في مستوى الشكل ويوازي ح أ أثرت القوى ١٦ \vec{MA} ، ٦ - \vec{MB} ، ٨ - \vec{MC} ، ٢٠ - \vec{MD} ، ١٨ - \vec{ME} في ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ هـ على الترتيب. أثبت أن محصلة هذه القوى = ١٤ \vec{MA} وتؤثر في نقطة على \vec{MH} وتبعد عن م مسافة تساوي $\frac{٥}{١٤} L$ حيث L طول ضلع السداسي.





اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

2

إذا أثرت مجموعة من القوى المتوازية في جسم متماسك وظل هذا الجسم ساكناً فإنه يُقال أن هذا الجسم متزن تحت تأثير هذه القوى كما يُقال أن مجموعة القوى المؤثرة على الجسم متوازنة.

ملاحظة: (شروط توازن عدة قوى متوازية مستوية)

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن :

① مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحدة يوازيها) يساوى صفراً.

② مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أية نقطة في مستويها = صفراً.

والشرط الأول يعنى أن محصلة هذه القوى تنعدم وبالتالي فلا يحدث في الجسم حركة انتقالية.

والشرط الثانى يعنى أن مجموعة هذه القوى لا تحدث حركة دورانية في الجسم.

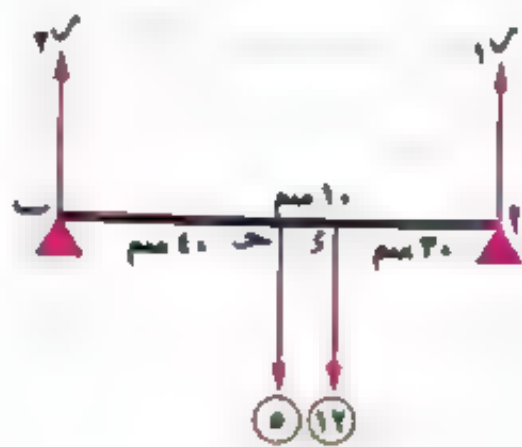
وكما نعلم فإننا في حالة القوى المتلاقية في نقطة فإن الشرط الأول يكون كافٍ وحده لحدوث الاتزان.

أما بالنسبة للقوى غير المتلاقية في نقطة فإن الأمر يتطلب توفر الشرط الثانى أيضاً حتى نضمن عدم حدوث حركة دورانية في الجسم.

مثال ١

يرتكز قضيب منتظم وزنه ٥ ثقل كجم في وضع أفقى على حاملين عند طرفيه والبعد بينهما ٨٠ سم ، علقت كتلة مقدارها ١٢ كجم في نقطة تبعد عن أحد الحاملين بمقدار ٢٠ سم. أوجد مقدار الضغط على كل من الحاملين.

الحل



القضيب متزن بتأثير ٤ قوى متوازية مستوية هي :
 R_1 رد فعل الحامل عند أ ، R_2 رد فعل الحامل عند ب
 ، ووزن القضيب ٥ ثقل كجم عند ح منتصف أ ب
 ، والثقل المعلق ١٢ ثقل كجم عند د حيث $د أ = ٢٠$ سم
 فحسب شروط التوازن يكون :

① مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

$$(١) \quad \therefore R_1 + R_2 - 5 - 12 = 0 \quad \therefore R_1 + R_2 = 17$$

② مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أ = صفرًا

$$\therefore 12 \times ٢٠ + 5 \times ٤٠ - R_2 \times ٨٠ = 0$$

$$\text{أي : } ٢٤٠ + ٢٠٠ - ٨٠ R_2 = 0$$

$$\therefore ٨٠ R_2 = ٢٤٠ + ٢٠٠ = ٤٤٠$$

$\therefore R_2$ (رد فعل الحامل عند ب) = ٧ ثقل كجم وهو يساوي الضغط على الحامل عند ب

وبالتعويض في (١) :

$$\therefore R_1 \text{ (رد فعل الحامل عند أ) } = ١٧ - ٧ = ١٠ \text{ ثقل كجم}$$

وهو يساوي الضغط على الحامل عند أ

ملاحظة

من الممكن الحصول على R_1 ، R_2 بإيجاد مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى مرة حول أ فنحصل على R_2 كما سبق ثم بإيجاد مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى مرة أخرى حول ب فنحصل على R_1 **إذ نجد أن :**

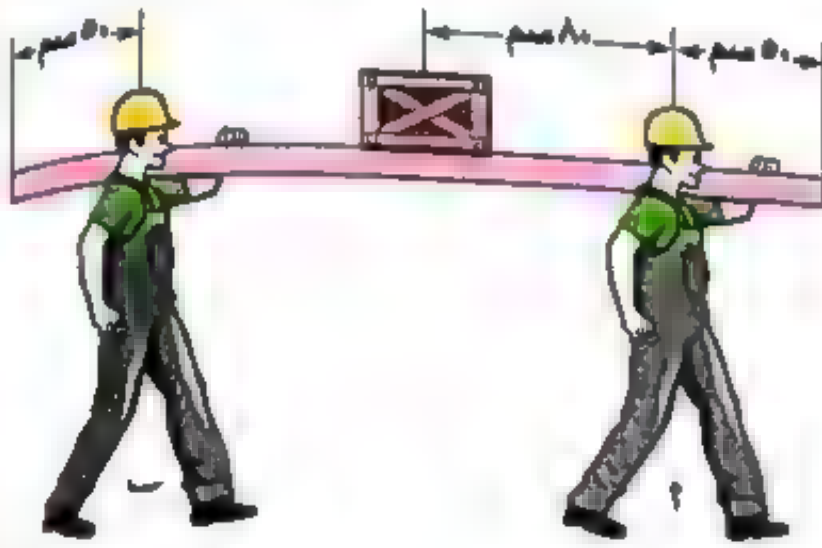
$$\text{مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول ب} = R_1 \times ٨٠ - ٥ \times ١٢ - ٤٠ \times ٥ = \text{صفرًا}$$

$$\text{أي : } ٨٠ R_1 = ٨٠٠$$

$$\therefore R_1 = ١٠ \text{ ثقل كجم وتكون } R_2 = ٧ \text{ ثقل كجم}$$

مثال ٢

رجلان ١، ٢ يحملان لوحًا منتظمًا من الخشب طوله ٢ متر ووزنه ١٠ ث.كجم لكل متر من طوله يحمل صندوقًا وزنه ٥٠ ث.كجم كما بالشكل المقابل. أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عيّن على اللوح موضع كتف الرجل ٢ حتى يتساوى الضغطان.



الحل

∴ اللوح منتظم فإن وزنه يؤثر في منتصفه
وزن اللوح = $2 \times 10 = 20$ ث.كجم
من شروط الاتزان نجد أن :
 $10 + 20 = 30 + 50 = 80$ (١)
ج. = صفر

$$\therefore 0 = 2 \times 30 - 1 \times 20 + 0.8 \times 50$$

∴ $30 = 20 + 80$ ∴ الضغط على كتف الرجل (ب) = ٣٥ ث.كجم

وبالتعويض في (١) : $10 = 30 - 80 = 40$ ث.كجم

∴ الضغط على كتف الرجل (٢) = ٤٥ ث.كجم

ونفرض أن موضع كتف الرجل (ب) يبعد س سم عن موضع كتف الرجل (٢) في الحالة التي يتساوى فيها الضغطان أي : $10 = 40 - 80 = 40$ ث.كجم
ج. = ٠

$$\therefore 0 = 2 \times 40 - 1 \times 20 + 0.8 \times 50$$

$$\therefore 0 = 80 - 20 + 40 = 100$$

أي أن : الرجل (ب) يتحرك $\frac{1}{2}$ متر ناحية الرجل (٢) حتى يتساوى الضغطان.

ملاحظة

في المثال السابق كلما اقترب الصندوق من كتف الرجل (٢) كلما زاد الضغط على كتفه وبالتالي زاد رد الفعل عنده وقل الضغط على كتف الرجل (ب) وبالتالي يقل رد الفعل عنده.

مثال ٣

الشكل المقابل ووزنها يؤثر ووضع بصد ٢٠٠ كجم فعل الأرض

الحل

من شروط
 $10 + 20 = 30$
ج. =
 1200
∴
= ٢٠
أي أن :
وبالتعويض
أي أن :

مثال ٤

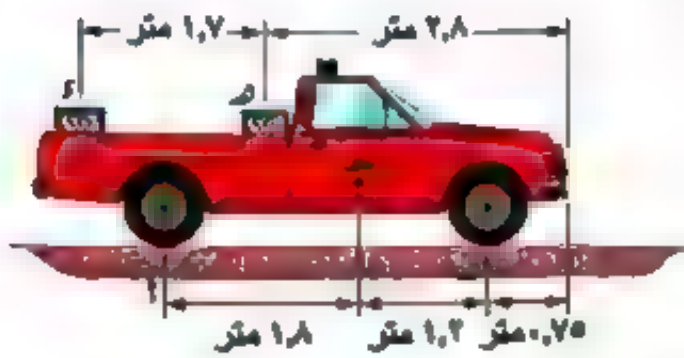
قضيبتان
٠ ، ٦٠٠

الحل

نفرض أن
وزنه ٦٠٠
المعلقين

مثال ٣

الشكل المقابل يوضح عربة نصف نقل كتلتها ١٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر في الخط الرأسى المار بالنقطة (ح) ووضع بصندوق العربة صندوقان كتلة كل منهما ٣٠٠ كجم فى الأوضاع المبينة بالشكل. أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين.



الحل

من شروط الاتزان نجد أن :

$$\begin{aligned} & \text{من شروط الاتزان نجد أن :} \\ & \text{١} \quad \text{م} + \text{م} = ١٢٠٠ + ٣٠٠ + ٣٠٠ = ١٨٠٠ \text{ كجم} \quad (١) \\ & \text{٢} \quad \text{م} = ٠ \text{ صفر} \\ & \therefore ١٢٠٠ \times ١,٢ + ٣٠٠ \times ٢,٠٥ - ٣٠٠ \times ٣,٧٥ = ٢ \times \text{م} \\ & \therefore ١٠٦٠ = \text{م} \text{ كجم} \end{aligned}$$

أى أن : رد فعل الأرض على العجلة الخلفية = ١٠٦٠ كجم

وبالتعويض فى (١) : $\therefore \text{م} = ٧٤٠$ كجم

أى أن : رد فعل الأرض على العجلة الأمامية = ٧٤٠ كجم.

مثال ٤

قضيب منتظم \overline{AB} طوله ٤٠ سم ووزنه ٦٠٠ ثقل جرام ، علق فى طرفيه A ، B جسمان كتلتاهما ٦٠٠ ، ١٢٠٠ جرام على الترتيب فمن أى نقطة على القضيب يجب تعليقه حتى يتزن أفقياً ؟

الحل

نفرض أن نقطة التعليق هى C فيكون القضيب متزناً بتأثير أربع قوى متوازية مستوية هى :

وزنه ٦٠٠ ثقل جرام ويؤثر فى M منتصف \overline{AB} ، الثقلين ٦٠٠ ، ١٢٠٠ ثقل جرام

المعلقين عند A ، B ، الشد فى خيط التعليق عند C وليكن T

الوحدة 3

فحسب شروط التوازن يكون :

① مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

$$0 = 1200 - 600 - 600 - R$$

$$\therefore R = 2400 \text{ ثقل جرام}$$

② مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول A = صفرًا

$$0 = R \times 4 - 1200 \times 1 + 600 \times 2$$

$$\text{أي: } 0 = R \times 4 - 1200 \times 1 + 600 \times 2$$

$$\therefore 4R = 1200 - 1200 = 0 \Rightarrow R = 0$$

أي أن : نقطة التعليق تبعد عن الطرف A بمقدار 25 سم

حل آخر :

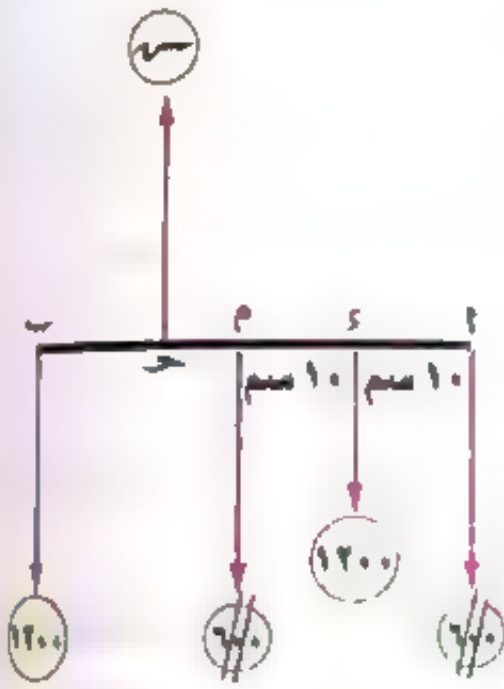
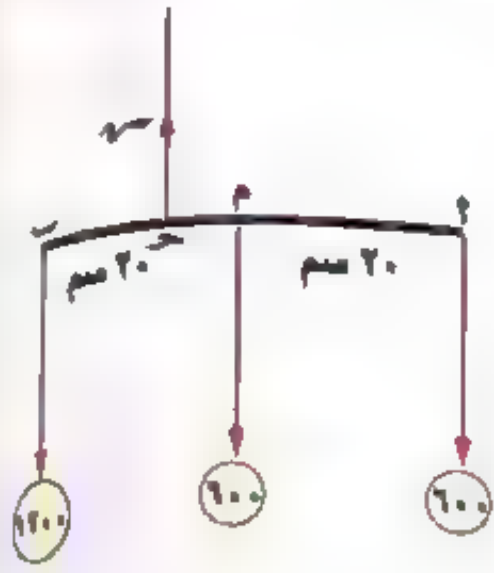
∴ محصلة القوتين 600 ، 600 هي 1200

تؤثر في النقطة E منتصف M

وكذلك القوتين 1200 ، 1200

تؤثر في النقطة H منتصف B

∴ بُعد الشد عن A = 25 سم.



مثال 5

ساق من الحديد طولها 120 سم ووزنها 9 ث.كجم يؤثر في منتصفها ، ترتكز في وضع أفقي على حاملين البعد بينهما 72 سم فإذا كان مقدار الضغط على أحد الحاملين ضعف مقدار الضغط على الحامل الآخر. فأوجد بُعد كل من الحاملين عن طرفي الساق.

الحل

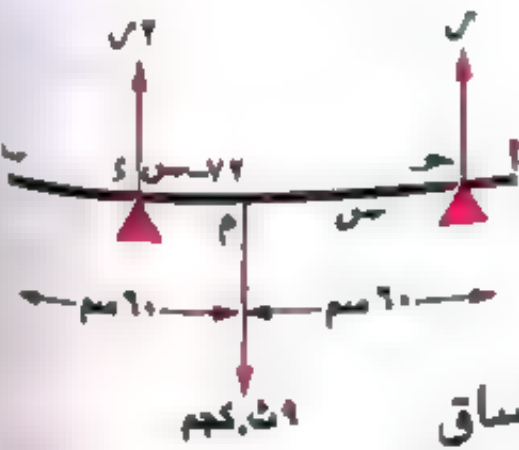
بفرض أن مقدار رد فعل الحامل الأول = R

وأن الحامل الأول يبعد مسافة S سم عن نقطة منتصف الساق M

∴ مقدار رد فعل الحامل الثاني = 2R

ويبعد الحامل الثاني مسافة (72 - S) سم

∴ الساق متزن تحت تأثير القوى التي مقاديرها R ، 2R ، 9 ث.كجم



$$\therefore 9 = 2 + 7 \quad \therefore 9 = 3 \quad \therefore 2 = 7 \text{ ث كجم}$$

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول م = صفر

$$\therefore 2 \times 7 - 3 \times 6 = 0 \quad \therefore 14 - 18 = 0 \quad \therefore 2 = 7 \text{ ث كجم}$$

$$\therefore 2 = 7 \text{ ث كجم} \quad \therefore 2 = 7 \text{ ث كجم}$$

$$\therefore 48 = 2 \times 24 \quad \therefore 48 = 2 \times 24 \quad \therefore 48 = 2 \times 24$$

$$\therefore \text{بُعد الحامل الأول عن الطرف أ} = 60 - 48 = 12 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{بُعد الحامل الثاني عن الطرف ب} = 60 - 24 = 36 \text{ سم}$$

ملاحظة

إذا اتزن جسم متماسك تحت تأثير ثلاث قوى متوازنة مستوية فإن كل قوة من القوى الثلاثة تساوي في المقدار وتضاد في الاتجاه محصلة القوتين الأخرين ويكون لهما نفس خط العمل.

فإذا أثرت القوى \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 ، \vec{F}_3 المتوازنة المستوية في النقطة أ، ب، ج على الترتيب من جسم متماسك فاتزن الجسم وكانت \vec{R} هي محصلة القوتين \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 فإن:

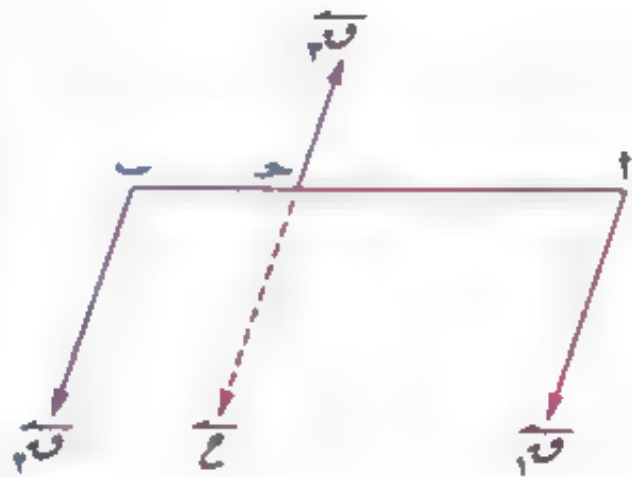
\vec{F}_3 ، \vec{R} متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه وخط عملهما واحد

$$\therefore \vec{F}_3 = \vec{R}$$

$$\therefore \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3$$

، \therefore نقطة تأثير المحصلة

$$\therefore \vec{F}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{F}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{F}_3 \times \vec{r}_3$$



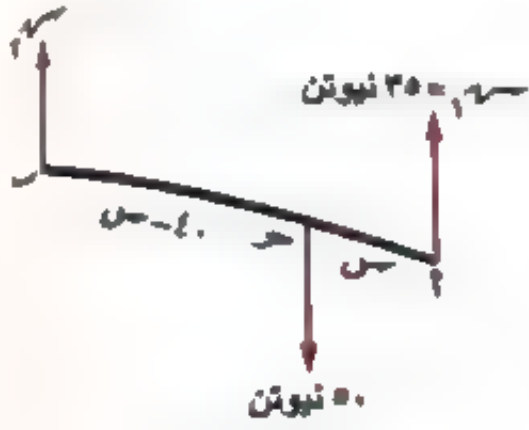
مثال ٦

أب قضيب خفيف طوله ٤٠ سم معلق من طرفيه أ، ب بخيطين رأسيين لا يتحمل أي منها شد يزيد عن ٣٥ نيوتن فعين المواضع من القضيب الذي يمكن تعليق ثقل قدره ٥٠ نيوتن منها دون أن ينقطع الخيط.

مع أفقى
قدار



الحل



بفرض أن أقرب نقطة إلى نقطة أ يمكن تعليق الثقل منها

دون أن ينقطع الخيط عند أ هي ح

، بفرض أن : أ ح = ح سم \therefore ب ح = 40 - ح سم

\therefore الشد عند أ أكبر ما يمكن \therefore سم = 25 نيوتن

\therefore القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها 25 ، 50 ، سم نيوتن

وباستخدام الملاحظة السابقة

$$\therefore 25 + \text{سم} = 50 \quad \therefore \text{سم} = 15 \text{ نيوتن}$$

$$\text{سم} \times \text{أ ح} = \text{سم} \times \text{ب ح} \quad \therefore 25 \times \text{سم} = 15 \times (40 - \text{سم})$$

$$\therefore 7 \text{ سم} = 2(40 - \text{سم}) \quad \therefore 7 \text{ سم} = 80 - 2 \text{ سم}$$

$$\therefore 10 \text{ سم} = 120 \quad \therefore \text{سم} = 12 \text{ سم}$$

\therefore أقرب موضع إلى أ يمكن تعليق الثقل منه دون انقطاع الخيط عند أ يبعد 12 سم عن أ

بالمثل أقرب موضع إلى ب يمكن تعليق الثقل منه دون انقطاع الخيط عند ب يبعد 12 سم عن ب

\therefore الثقل يمكن تعليقه في أي نقطة على القضيب لا يقل بعدها عن 12 سم عن أ أو ب

حل آخر :

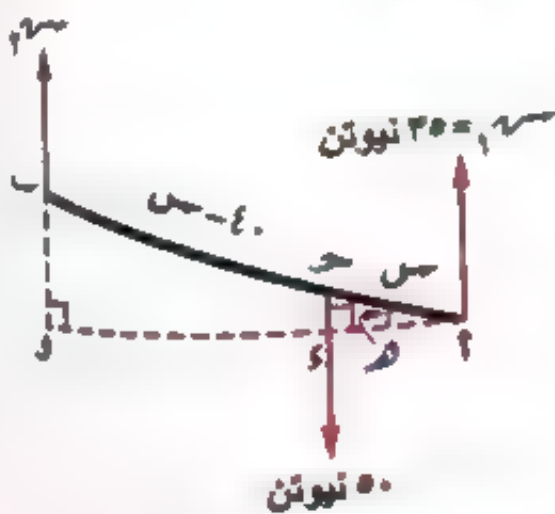
\therefore القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها 25 ، 50 ، سم نيوتن

$$\therefore 25 + \text{سم} = 50 \quad \therefore \text{سم} = 15 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{ع} = \text{صفر} \quad \therefore 50 \times 59 - 25 \times 15 = 91 \times \text{صفر}$$

$$\therefore 50 \times \text{سم} - 25 \times 40 = 40 \times \text{سم}$$

$$\therefore 50 \text{ سم} = 600 \quad \therefore \text{سم} = 12 \text{ سم}$$



حل ثالث :

$\therefore S_1 + S_2 = 50$ ، أي من الخيطين لا يتحمل شداً يزيد عن ٣٥ نيوتن

\therefore أقل شد في الخيط الآخر $= 50 - 35 = 15$ نيوتن

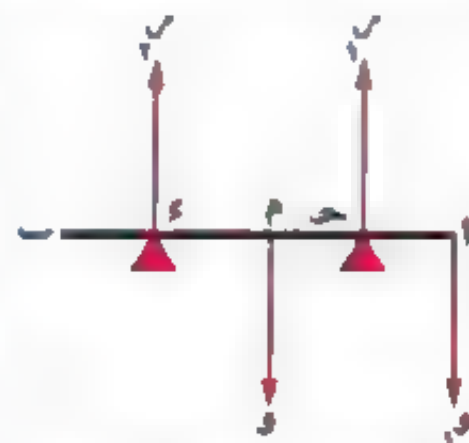
$\therefore 15 \geq$ الشد في أي خيط ≥ 35

$\therefore S_1 = 0$ ، $\therefore S_2 \times 40 = 50 \times 50$

$\therefore S_2 = \frac{50}{4} = 12.5$ ، $\therefore 15 \geq \frac{50}{4} \geq 35$ ، $\therefore 12 \geq S_2 \geq 28$

أي أن : الثقل يمكن أن يعلق على بُعد بين ١٢ سم ، ٢٨ سم من أ أو عندهما.

ملاحظة



إذا ارتكز قضيب أ ب مقدار وزنه و على حاملين عند نقطتين

ح ، و منه وعلق ثقل مقداره و من أحد طرفيه وليكن أ

ونذكر أن : الثقل المعلق من أ أكبر ثقل يجعل القضيب متزنًا أو

يجعل القضيب على وشك الدوران أو الانقلاب حول ح أو يجعل

القضيب على وشك الانفصال عن الحامل و لهذا يعني أن : مقدار رد فعل القضيب عند و = صفر

أي أن : $S_1 = 0$ = صفر

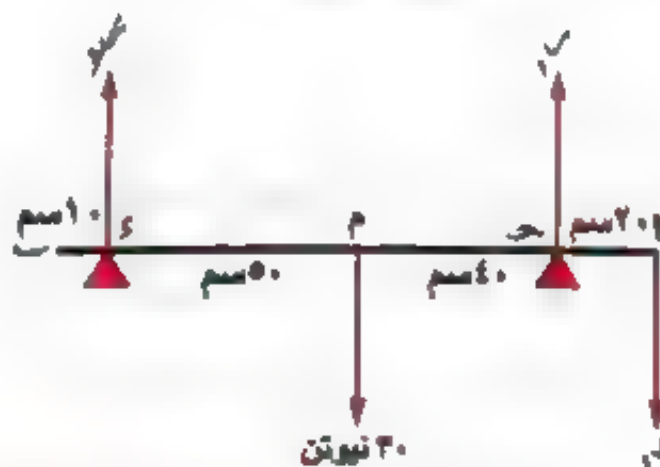
مثال ٧

أ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ومقدار وزنه ٣٠ نيوتن يرتكز في وضع أفقي على حاملين

عند نقطتين ح ، و منه بحيث : ح = ٢٠ سم ، و = ١٠ سم فأوجد أكبر ثقل يمكن

تعليقه من أ ، ب كل على حدة دون أن يختل توازن القضيب وأوجد مقدار رد الفعل على

القضيب في كل حالة.



الحل

• الحالة الأولى (أكبر ثقل معلق عند أ) :

بفرض أن مقدار أكبر ثقل معلق عند أ

ويجعل الجسم متزن = و

\therefore مقدار رد الفعل عند و = صفر **أي أن :** $S_2 = 0$

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ نيوتن

لاحظ أن:

$$\frac{10}{60} = \frac{20}{20} = \frac{30}{60}$$

∴ ١٠ = ١٠ نيوتن ، ٢٠ = ٢٠ نيوتن ، ٣٠ = ٣٠ نيوتن.

$$(1) \quad 20 + 10 = 30$$

$$10 \times 20 = 20 \times 10$$

$$20 \times 20 = 40 \times 10$$

$$\therefore 60 = \frac{40 \times 20}{20} = 40 \text{ نيوتن}$$

وبالتعويض في (١) : ∴ ١٠ = ٢٠ + ٦٠ = ٩٠ نيوتن

∴ مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه عند ١ دون أن يختل توازن القضيب = ٦٠ نيوتن

، رد فعل الحامل عند ح على القضيب = ٩٠ نيوتن.

• الحالة الثانية (أكبر ثقل معلق عند ب) :

بفرض أن مقدار أكبر ثقل معلق عند ب

ويجعل الجسم متزن = ٢٠

∴ مقدار رد الفعل عند ح = صفر

أي أن : ٠ = ٢٠

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ نيوتن

$$(2) \quad 30 + 20 = 50$$

$$20 \times 20 = 50 \times 10$$

$$50 \times 20 = 100 \times 10$$

$$\therefore 100 = \frac{50 \times 20}{10} = 100 \text{ نيوتن}$$

وبالتعويض في (٢) :

$$\therefore 100 = 100 + 20 = 120 \text{ نيوتن}$$

∴ مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه من ب دون أن يختل توازن القضيب = ١٠٠ نيوتن

، رد فعل الحامل عند ح على القضيب = ١٢٠ نيوتن.

مثال ٨

أ ب قضيب غير منتظم طوله ٦٠ سم يرتكز في وضع أفقي على وتد ح ، ح حيث :
 ح = ب = ١٠ سم فإذا عُلق من أ ثقل قدره ٩٠ ثقل جرام يصبح القضيب على وشك الدوران
 حول ح وإذا عُلق من ب ثقل قدره ١٥٠ ثقل جرام يصبح القضيب على وشك الدوران حول ب
 أوجد مقدار وزن القضيب وبُعد نقطة تأثيره عن الطرف أ



الحل
بفرض أن مقدار وزن القضيب = و ثجم
ويؤثر في نقطة م حيث : ح م = س س سم
• عند تعليق الثقل ٩٠ ث.جم من أ :
∴ القضيب على وشك الدوران حول ح
∴ $\bar{M} = 0$ صفر

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها \bar{M} ، ٩٠ ، و ثجم
∴ $90 \times 10 = و \times س$
∴ $900 = و \times س$
(١)



• عند تعليق الثقل ١٥٠ ث.جم من ب :
∴ القضيب على وشك الدوران حول ب
∴ $\bar{M} = 0$ صفر

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى مقاديرها
 \bar{M} ، و ، ١٥٠ ث.جم
∴ $150 \times 10 = و \times س$
∴ $1500 = و \times س$

∴ $10 \times 150 = (س - 10) \times و$
(٢)

بالتعويض من (١) في (٢) : $1500 = 900 - و \times 10$
∴ $2400 = و \times 10$
وبالتعويض في (١) : $900 = 60 \times س$ ∴ $س = 15$ سم
∴ مقدار وزن القضيب = ٦٠ ث.جم
وبعد نقطة تأثير وزنه عن أ = $10 + 15 = 25$ سم.

مثال ٩

ساق غير منتظمة أ ب طولها ٣٠ سم عُلق من طرفيها ثقلان متساويان كل منهما ٧,٥ ثقل كجم فاتزنت الساق في وضع أفقي عند ارتكازها على محور عند نقطة ح حيث : أ ح = ١٢ سم وعندما أُضيف إلى كل من الثقلين المعلقين من الطرفين ثقل آخر قدره ١٠,٥ ثقل كجم اتزنت الساق في وضع أفقي عند تعليقها من نقطة د حيث : د أ = ١٣ سم. أوجد وزن الساق وبعد نقطة تأثير الوزن عن الطرف أ

الحل

نفرض أن وزن الساق = w و ثقل كجم وأنه يؤثر في نقطة M حيث $M = 4$ سم

في الحالة الأولى : الساق متزنة بتأثير أربع قوى هي :

الثقلين 7.5 ، 7.5 ثقل كجم المعلقين عند الطرفين

وزن الساق w عند M ، ورد فعل الحامل عند H وليكن r

فحسب شروط التوازن يكون :

① مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

$$\therefore r - w - 7.5 - 7.5 = 0 \quad \text{أي : } r - w = 15 \quad (1)$$

② مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول H = صفرًا

$$\therefore -7.5 \times 4 - w \times 4 + 7.5 \times 18 = 0 \quad \text{صفرًا}$$

$$\therefore -30 - 4w + 135 = 0 \quad \therefore -4w = -105 \quad \therefore w = 26.25$$

$$\therefore r - 26.25 = 15 \quad \text{أي : } r = 41.25 \quad (2)$$

في الحالة الثانية : الساق متزنة بتأثير أربع قوى هي :

الثقلين 18 ، 18 ثقل كجم عند الطرفين ، وزن الساق w عند M

، الشد في خيط التعليق عند S وليكن s

فحسب شروط التوازن يكون :

① مجموع القياسات الجبرية للقوى = صفرًا

$$\therefore s - w - 18 - 18 = 0$$

$$\text{أي : } s - w = 36 \quad (1)$$

② مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول S = صفرًا

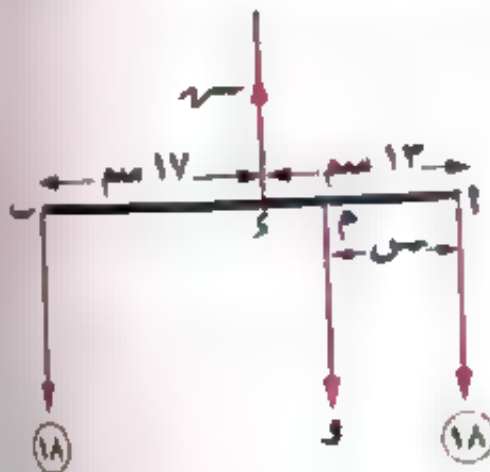
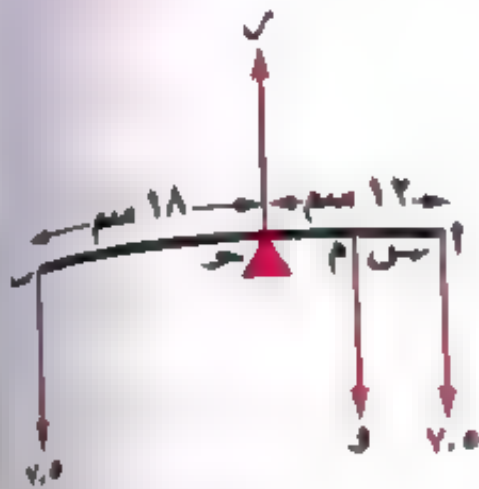
$$\therefore -18 \times 13 - w \times 4 + 18 \times 17 = 0 \quad \text{صفرًا}$$

$$\therefore -234 - 4w + 306 = 0 \quad \therefore -4w = -72 \quad \therefore w = 18$$

$$\therefore s - 18 = 36 \quad \text{أي : } s = 54 \quad \text{من (2) ، (4) بالقسمة :}$$

$$\therefore \frac{45}{72} = \frac{s - 12}{s - 13}$$

$$\therefore \frac{5}{8} = \frac{s - 12}{s - 13}$$



$$\therefore 65 - 5 = 8 - 96 \text{ سم} \quad \therefore 8 - 5 = 96 - 65$$

$$\therefore 3 = 21$$

\therefore سم (بعد نقطة تأثير وزن الساق عن ١) $= \frac{1}{3} \times 10$ سم

وبالتعويض في (٢) :

$$\therefore 45 = (12 - \frac{1}{3} \times 10) \quad \therefore 45 = 9 \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{و (وزن الساق)} = \frac{2}{3} \times 45 = 30 \text{ ثقل كجم}$$

وإذا أريد الحصول على رد فعل الحامل عند ح نعوض في المعادلة (١)

وإذا أريد إيجاد الشد في الخيط المعلق عند د نعوض في المعادلة (٢)

مثال ١٠

أب قضيب منتظم طوله ٤٠ سم ووزنه ٤ ثقل كجم يرتكز أفقياً على حاملين أحدهما عند ح حيث :

١ = ٩ سم والثاني عند د ، عُلق من طرفيه ١ ، ب الثقلان ١٤ ، ٦ ثقل كجم على الترتيب.

أوجد موضع النقطة د إذا كان الضغط على الحامل عند ح ضعف الضغط على الحامل عند د

أوجد أيضاً أكبر ثقل يُضاف إلى الثقل المعلق عند ١ دون أن يختل توازن القضيب.

الحل

١) \therefore الضغط على الحامل عند ح ضعف الضغط على الحامل عند د

\therefore رد فعل الحامل عند ح ضعف رد فعل الحامل عند د

وبفرض أن رد فعل الحامل عند د = م

يكون رد فعل الحامل عند ح = ٢ م

ويكون القضيب متزنًا بتأثير خمس قوى متوازية هي :

الثقلين ١٤ ، ٦ ثقل كجم المعلقين عند الطرفين ١ ، ب ، وزن القضيب ٤ ثقل كجم عند م منتصف

أب ، رد فعل الحاملين عند ح ، د وهما ٢ م ، م

\therefore حسب شروط الاتزان يكون :

(١) المجموع الجبري لقياسات القوى = صفر

$$\therefore 2م + م - 14 - 4 - 6 = 0 \quad \text{أي : } 3م = 24 \quad \therefore م = 8$$

(٢) المجموع الجبرى لقياسات عزوم القوى حول $A = \text{صفرًا}$

$$\therefore 4 \times 9 + 6 \times 1 - 2 \times 9 - 9 \times 8 = \text{صفرًا}$$

$$\therefore 4 \times 9 + 6 \times 1 - 2 \times 9 - 9 \times 8 = \text{صفرًا}$$

$$\therefore 36 + 6 - 18 - 72 = 0$$

وبالتعويض عن $8 = 1$

$$\therefore 36 = 9 \times 8$$

$$\therefore 22 = 9 \times 8$$

أى أن: 8 تبعد عن الطرف A مسافة 22 سم.

(٢) نفرض أن أكبر ثقل يضاف إلى الثقل 14 ثقل كجم عند A

ويحفظ توازن القضيب هو و ثقل كجم.

فى هذه الحالة ينعدم الضغط على الحامل عند S ويصبح

القضيب متزنًا بتأثير أربع قوى متوازية هى :

الثقل $(9 + 14)$ ثقل كجم عند A ، ثقل كجم عند B

، وزن القضيب 4 ثقل كجم عند M منتصف AB ، رد فعل الحامل عند C وليكن R

∴ حسب شروط الاتزان يكون :

(١) المجموع الجبرى لقياسات القوى = صفر

$$\therefore R - (9 + 14) - 4 - 6 = 0$$

$$\therefore R - 9 - 14 = 24$$

(١)

(٢) المجموع الجبرى لقياسات عزوم القوى حول $C = \text{صفرًا}$

$$\therefore - (9 + 14) \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 3 = 0$$

$$\therefore - (9 + 14) \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 3 = 0$$

$$\therefore - 23 + 8 + 18 = 0$$

$$\therefore 9 = 10.4$$

$$\therefore 9 = 11 \frac{5}{9} \text{ ثقل كجم}$$

مثال ١١

أربع قوى \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 ، \vec{F}_3 ، \vec{F}_4 متوازية ومتزنة تؤثر فى النقاط

$A(0, 5)$ ، $B(1, 2)$ ، $C(-2, 4)$ ، $D(-3, 0)$ على الترتيب

فإذا كانت : $\vec{F}_1 = 2\vec{s} + 4\vec{v}$ ، $\|\vec{F}_2\| = 10$ نيوتن وتضاد فى الاتجاه \vec{F}_1

أوجد كلاً من : \vec{F}_2 ، \vec{F}_3 ، \vec{F}_4

لافتان

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \times \text{متجه وحدة في اتجاهها}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{(4, -2) \cdot 10}{16+9} = \frac{(4, -2)}{5}$$

$$\therefore 10 = 16 + 9 = 25$$

$$\therefore 5 = 10$$

$$\therefore \vec{v} = 8 - 6 = 2$$

$$\therefore \vec{v} = 4 - 2 = 2$$

$$\therefore \vec{v} = 4 - 2 = 2$$

∴ مجموع عزوم القوى حول نقطة و = 0

$$\therefore 8 - 6 = 2$$

$$\therefore 2 + 4 = 6$$

$$\therefore 4 - 2 = 2$$

$$\therefore (1, 8) = (0, 2) - (1, 5) = 15$$

$$\therefore (2, 4) = (0, 2) - (2, 1) = 5$$

$$\therefore (4, -2) = (0, 2) - (4, -2) = 10$$

$$\therefore \vec{v} = 15 + 5 + 10 = 30$$

$$\therefore (8 - 6) \times (2 + 4) + (4 - 2) \times (8 - 6) = 2 \times 6 + 2 \times 2 = 16 + 9 = 25$$

$$\therefore = (4 - 2) \times (4 - 2) + (2 + 4) \times (8 - 6) = 4 + 16 = 20$$

$$\therefore 16 + 9 = 25$$

$$\therefore 25 = 16 + 9 = 25$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{9}{4} - \frac{27}{16} = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \frac{9}{16} = 1$$

∴ مجموع القوى = 0

∴ القوة متزنة

$$\therefore \vec{v} = \frac{9}{4} + \left(\frac{9}{4} - \frac{27}{16} \right) + (8 - 6) + (2 + 4) = \frac{9}{4} + \frac{9}{16} + 2 + 6 = \frac{20}{4} + \frac{9}{16} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{20}{4} + \frac{70}{16} = \frac{35}{8}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{20}{4} + \left(\frac{9}{4} - \frac{27}{16} \right) = \frac{20}{4} + \frac{9}{16} = \frac{35}{8}$$

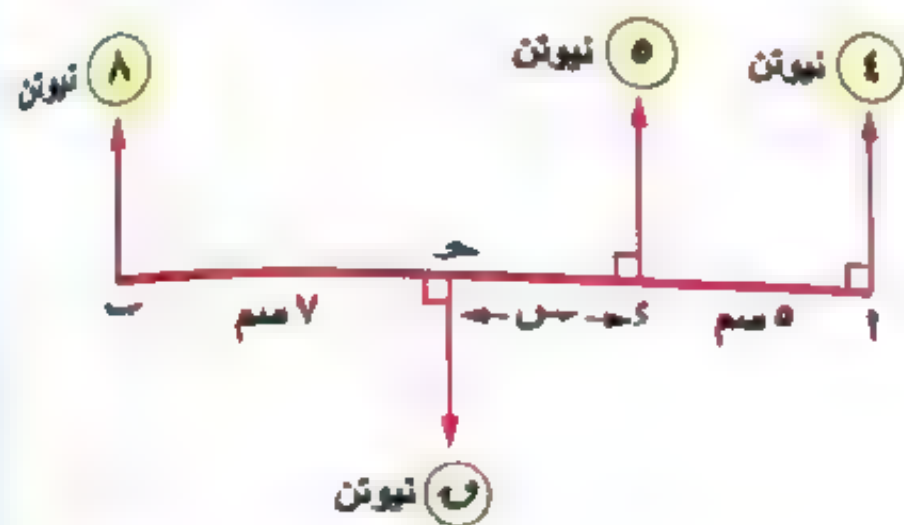
على اتران مجموعة من القوى المتوازية المستوية



من أسئلة الكتاب المدرسي



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :



١ (دور أول ٢٠١٧) في الشكل المقابل :

أ- قضيب متزن أفقياً فإن

البعد س = سم.

(أ) ٥٦

(ب) ٣٦

(ج) ٢٧

(د) ٤

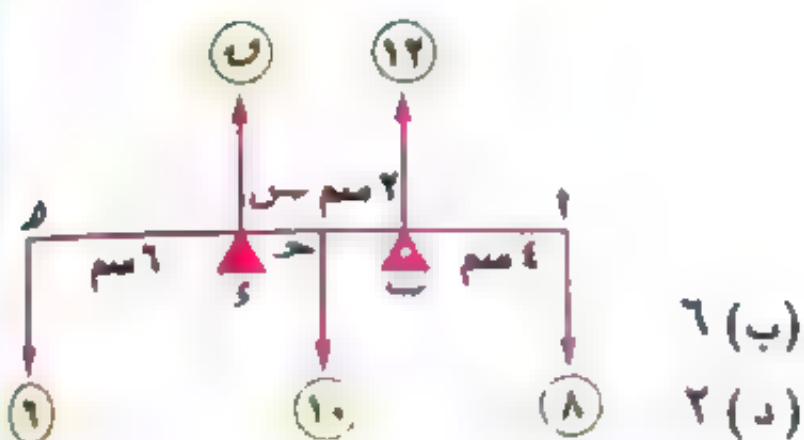
٢ في الشكل المقابل :

إذا كان القضيب متزن

فإن : س = سم.

(أ) ٨

(ج) ٤



٣ في الشكل المقابل :

إذا كان أ- قضيب خفيف متزن أفقياً

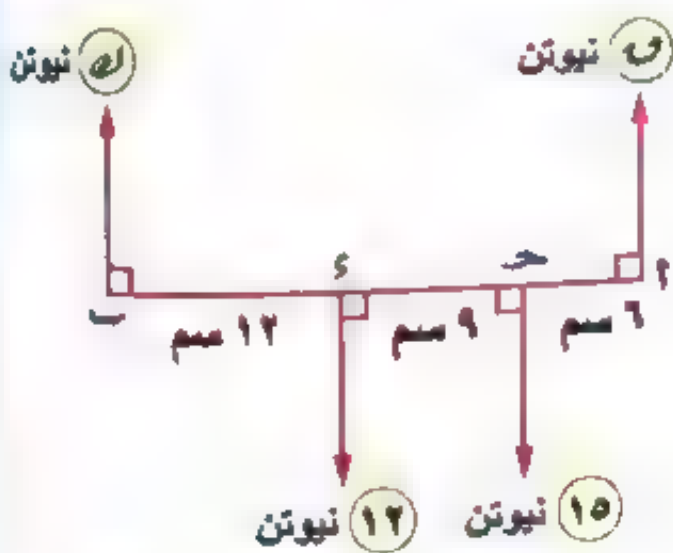
فإن :

(أ) ١٥ = س ، ١٢ = ل نيوتن

(ب) ١٧ = س ، ١٠ = ل نيوتن

(ج) ١١ = س ، ١٦ = ل نيوتن

(د) ١٠ = س ، ١٧ = ل نيوتن



٤ (دور أول ٢٠١٩) في الشكل المقابل :

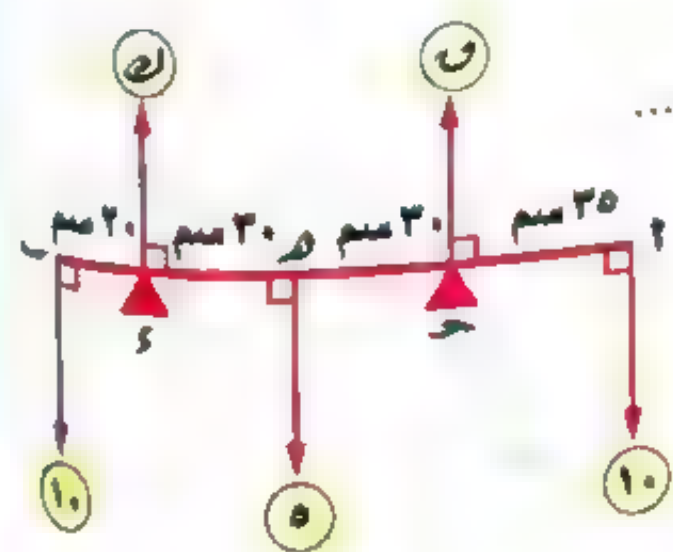
إذا كان القضيب خفيف ومتزن أفقياً فإن

(أ) ١٥ = س ، ١٠ = ل نيوتن

(ب) ١٠ = س ، ١٥ = ل نيوتن

(ج) ١٠ = س ، ١٠ = ل نيوتن

(د) ١٢,٥ = س ، ١٢,٥ = ل نيوتن



٢ ترتكز ساق من الحديد طولها ٢٠ سم ووزنها ٢٠ نيوتن (يؤثر عند منتصف الساق) في وضع أفقي على حاملين، أحدهما عند أحد الطرفين والآخر على بُعد ١٠ سم من الطرف الآخر. أوجد رد فعل كل من الحاملين على الساق.
«٥ ، ١٥ نيوتن»

٣ أ ب قضيب طوله متر ووزنه ١٢ ث كجم يؤثر عند نقطة على بُعد ٢٠ سم من الطرف أ وضع على حامل أملس عند منتصفه. أوجد مقدار الثقل الذي يجب أن يعلق من الطرف ب ليتزن القضيب في وضع أفقي وكذلك رد فعل الحامل.
«٤,٨ ث كجم ، ١٦,٨ ث كجم»

٤ قضيب خفيف أ ب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم ، علق في وضع أفقي من طرفيه أ ، ب بواسطة حبلين رأسيين ثم علق جسم وزنه ١٥٠ ث كجم من نقطة ح على القضيب بحيث :
أ ح = ٢٦ سم. احسب مقدار الشد في كل من الحبلين عندما يكون القضيب متزنًا أفقيًا.
«٩٠ ، ٦٠ ث كجم»

٥ يرتكز قضيب منتظم ثقله ٨ وزن كجم في وضع أفقي على حاملين عند طرفيه البعد بينهما ٢٠ سم علقت كتلة قدرها ١٢ كجم من نقطة تبعد عن أحد طرفيه مسافة $7\frac{1}{4}$ سم. أوجد مقدار الضغط الواقع على كل من الحاملين.
« $11\frac{1}{4}$ ، $8\frac{1}{4}$ ثقل كجم»

٦ قضيب منتظم طوله ١ متر ووزنه ٥٠ نيوتن (يؤثر في منتصفه) معلق أفقيًا عند طرفيه بحبلين رأسيين ويحمل القضيب ثقلين أحدهما ١٥ نيوتن على بُعد ٢٠ سم من أحد الطرفين والآخر ٢٠ نيوتن على بُعد ٢٠ سم من الطرف الآخر. أوجد مقدار الشد في كل من الحبلين.
«٤٢ ، ٤٣ نيوتن»

٧ أ ب قضيب منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه = ٢٥ نيوتن يستند على وتد أملس عند منتصفه. علق من نقطة ح على بُعد ٢٠ سم من أ ثقل قدره ١٠ نيوتن وحفظ توازنه أفقيًا بخيط رأسي عند أ أوجد الشد في الخيط ورد فعل الوتد.
«٥ نيوتن ، ٢٠ نيوتن»

٨ (دور اول ٢٠١٧) أ ب لوح خشبي منتظم الكتلة كتلته ١٠ كجم وطوله ٤ متر يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند نقطة تبعد ١ متر عن ب بين أين يقف على اللوح طفل وزنه ٥٠ ث كجم لكي يتساوى رد الفعل على الحاملين.
«١,٤ م من أ»



١٥ علق قضيب مهمل الوزن طوله ١٢٠ سم في وضع أفقي بواسطة خيطين رأسيين عند طرفيه ثم علق فيه ثقلان مقدارهما ٥ نيوتن ، ٨ نيوتن عند نقطتي تثبيته. أوجد الشد في كل من الخيطين.

١٦ يرتكز قضيب مهمل الوزن طوله ٩٠ سم في وضع أفقي على حاملين عند نقطتي تثبيته وعلق من طرفيه ثقلان مقدارهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن. عيّن الضغط على كل من الحاملين.

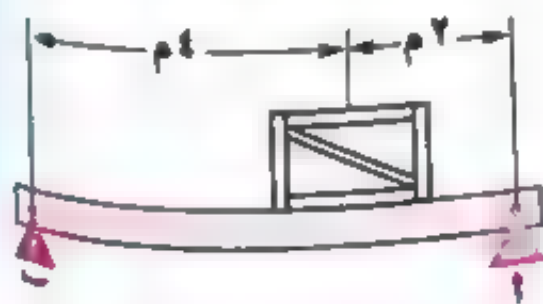
١٧ (دور أول ٢٠٠٥) أ ب قضيب منتظم طوله ١,٥ مترًا ووزنه ١٤٠ نيوتن يؤثر في نقطة منتصفه ويرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند الطرف أ والثاني عند نقطة حـ من القضيب. فإذا كان مقدار رد فعل الحامل عند أ يساوي ثلثي مقدار رد فعل الحامل عند حـ أوجد : ١) مقدار رد الفعل عند كل من الحاملين.

٢) بُعد حـ عن الطرف ب

١٨ ساق منتظمة طولها ١٠٠ سم ووزنها ١٥٠٠ ثجم ترتكز في وضع أفقي على حاملين المسافة بينهما ٧٥ سم فإذا كان الضغط على أحد الحاملين $\frac{2}{3}$ الضغط على الحامل الآخر. أوجد بُعد كل حامل عن الطرف القريب منه.

١٩ قضيب منتظم طوله ١ متر ، وزنه ٧٥ نيوتن يرتكز في وضع أفقي على حاملين البعد بينهما ٢٤ سم فإذا كان الضغط على أحد الحاملين يساوي ضعف الضغط على الحامل الآخر. أوجد بُعد كل حامل عن الطرف القريب للقضيب.

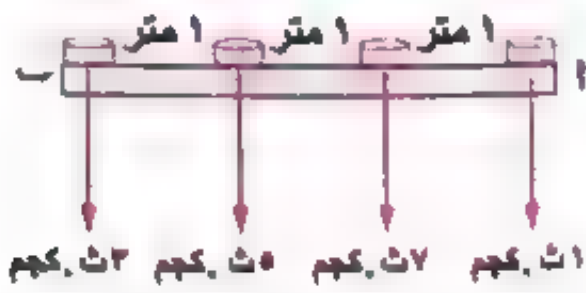
٢٠ الشكل المقابل :



٢٥٠٠ ث كجم ، ١٧٠ ث كجم

يوضع لوح خشبي منتظم كتلته ٣٠ كجم لكل متر من طوله يرتكز في وضع أفقي على حاملين أ ، ب ويحمل صندوق كتلته ٢٤٠ كجم. أوجد الضغط الواقع على كل حامل.

١٥ في الشكل المقابل :



وضعت أربعة أثقال مقدارها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم على قضيب خفيف كما بالشكل.

عين نقطة تعليق على القضيب بحيث يظل القضيب أفقياً.

« ١ ٥ م من ١ »

١٦ قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ، وزنه ٨ كجم عُلق في وضع أفقي من نقطتين تبعد كل

منهما ١٠ سم عن أحد طرفيه بخيطين رأسيين لا يتحمل كل منهما شداً أكثر من ١٦ كجم.

فإذا عُلق ثقل قدره (٩) على بُعد ٢٠ سم من منتصف القضيب ، أوجد مقدار (٩) التي

تجعل أحد الخيطين على وشك أن ينقطع ثم أوجد مقدار الشد في الخيط الآخر.

« ١٦ ، ٨ كجم »

١٧ قضيب منتظم أ ب طوله ٤ متر وكتلته ٦ كجم عُلق في طرفيه أ ، ب جسمان كتلتاهما ٦ ، ١٢ كجم

على الترتيب فمن أي نقطة يجب تعليق القضيب كي يتزن أفقياً ؟

« ٢٠٥ متر من أ »

١٨ أ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٤ ثقل كجم عُلق من طرفه أ ثقل قدره ٥ ثقل كجم

ومن طرفه ب ثقل آخر فإذا كان القضيب في حالة اتزان في وضع أفقي متركزاً على قائم

رأسى عند نقطة منه تبعد عن أ بمقدار ٤٠ سم. أوجد مقدار الثقل المعلق عند ب وكذلك رد

الفعل عند نقطة الارتكاز.

« ١ ٤ ثقل كجم ، ١ ٤ ثقل كجم »

١٩ ساق منتظمة طولها ٨٠ متر ووزنها ٨٠ ثقل جم ترتكز في وضع أفقي على حاملين عند طرفيها

ومُعلق بها الأثقال ٤٠ ، ٢٠ ، ٥٠ ثقل جم على بُعد ٢٠ ، ٦٠ ، ٨٠ سم من أحد طرفيها.

أوجد الضغط الواقع على كل من الحاملين.

« ٩٠ ، ١١٠ ثقل جم »

٢٠ ساق مهمة الوزن طولها ١٢٠ سم ترتكز في وضع أفقي عند طرفيها على حاملين. عند أي

موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد

الطرفين مساوياً لضعف قيمته عند الطرف الثاني ؟

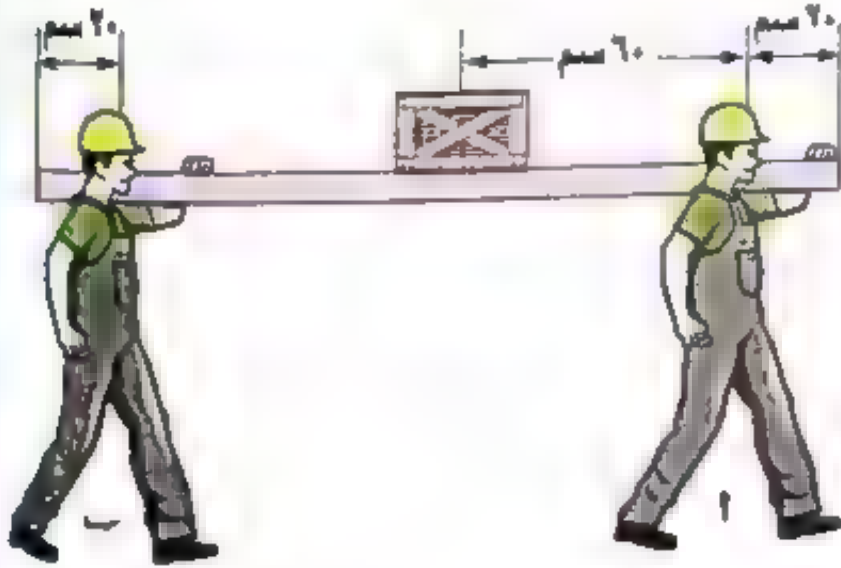
« ٤٠ سم من أي من الطرفين »

٢١ (دورثاه ٢٠١٧) ب قضيب منتظم طوله ٩٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن مُعلق في وضع أفقي بخيطين رأسيين من طرفيه أ ، ب أين يُعلق ثقل مقداره ١٥٠ نيوتن حتى يكون مقدار الشد عند أ ضعف مقدار الشد عند ب ؟

٢٢ ب قضيب منتظم وزنه ٤٠ ث كجم وطوله ١ متر يتزن عندما يرتكز بطرفة أ على نضد أفقي أملس ويرتفع طرفه الآخر ب بتأثير قوة رأسية تؤثر عند نقطة على بُعد ٢٠ سم من الطرف ب أوجد مقدار هذه القوة ورد فعل النضد.

٢٣ أ ح قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٦٠ نيوتن عُلق في وضع أفقي بواسطة خيطين رأسيين عند ب ، ح حيث : أ ب = ٣٠ سم فكان الشد في الخيط عند ب ثلاثة أمثال الشد في الخيط عند ح عيّن نقطة تأثير وزن القضيب ومقدار قوة الشد في كل من الخيطين.

٢٤ ب قضيب غير منتظم طوله ٤ متر يرتكز أفقيًا على حاملين أحدهما عند أ والآخر عند ب فإذا كان مقدار رد الفعل عند كل من أ ، ب هما ٥ نيوتن ، ٣ نيوتن على الترتيب ، إذا اتزن هذا القضيب أفقيًا على حامل واحد. أوجد بُعد هذا الحامل من نقطة أ ؟



٢٥ رجالان أ ، ب يحملان لوحًا من الخشب طوله ٢ متر ووزنه ١٦ ث كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقًا وزنه ٢٤ ث كجم كما هو موضحًا في الشكل المقابل أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عيّن على أي نقطة من اللوح يكون كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطان.

٢٢ ، ١٧ ث كجم ، ١٣٦ سم من أ

٢٦ أ ب ح د قضيب غير منتظم يرتكز في وضع أفقي على حاملين أملسين عند ب ، ح حيث : أ ب = ح د = ٣٥ سم ، ب ح = ٨٠ سم فإذا كان القضيب يصبح على وشك الدوران حول ب إذا عُلق من الطرف أ ثقل قدره ١٢ ثقل كجم ، كما يصبح على وشك الدوران حول ح إذا عُلق من الطرف د ثقل قدره ٢٠ ثقل كجم. فأوجد ثقل القضيب وبُعد مركز ثقله عن الطرف أ ؟

١٤٠ ثقل كجم ، ٦٥ سم من أ

الدرس الثالث

٢٧ (دور اول ٢٠٠٤) أ قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ٤٠ نيوتن معلق من منتصفه بواسطة خيط خفيف رأسى. إذا اتزن القضيب أفقياً عندما عُلق ثقل مقداره ١٠ نيوتن عند $\frac{1}{4}$ فأوجد بُعد نقطة تأثير الوزن عن $\frac{1}{4}$ وإذا رفع الثقل المعلق فأوجد مقدار القوة الرأسية التى تؤثر عند $\frac{1}{4}$ بحيث يظل القضيب متزاناً فى وضع أفقى. «٦٢.٥ سم من $\frac{1}{4}$ ، ١٠ نيوتن»

٢٨ أ قضيب غير منتظم وزنه ٥ ثقل كجم وطوله ٢٤ سم يرتكز أفقياً على حاملين عند $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، حيث : $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ سم عُلق من $\frac{1}{4}$ ثقل قدره ١٠ ثقل كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول $\frac{1}{2}$ عيّن مركز ثقل القضيب ثم أوجد أكبر ثقل يعلق من $\frac{1}{4}$ دون أن يفقد القضيب توازنه مع بقاء الثقل المعلق من $\frac{1}{4}$ «على بُعد ١٥ سم من $\frac{1}{4}$ ، ٤٢ ثقل كجم»

٢٩ (دور اول ٢٠٠٩) أ يرتكز قضيب منتظم $\frac{1}{4}$ (وزنه يؤثر عند نقطة منتصفه) وطوله ٨٠ سم فى وضع أفقى على حاملين عند طرفيه ويحمل القضيب ثقلين مقدار أحدهما ٥ نيوتن عند نقطة تبعد ٦٠ سم عن $\frac{1}{4}$ ومقدار الآخر ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ٥ سم عن $\frac{1}{4}$ ، فإذا كانت قيمة رد فعل الحامل عند $\frac{1}{4}$ مساوية ضعف قيمتها عند $\frac{1}{2}$ فأوجد مقدار وزن القضيب وأيضاً مقدارى ردى الفعل عند كل من $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ٢٠ ، ٤٠ نيوتن»

٣٠ أ قضيب غير منتظم طوله ٩٠ سم وزنه ٢٠ نيوتن يؤثر عند نقطة تبعد ٤٠ سم من $\frac{1}{4}$ ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين عند $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، حيث : $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ سم عُلق ثقل ١٠ نيوتن عند نقطة على بُعد ٣٠ سم من الطرف $\frac{1}{4}$ أوجد أين يُعلق ثقل قدره ٢٠ نيوتن حتى يكون رد فعل الحامل عند $\frac{1}{4}$ ضعف قيمته عند $\frac{1}{2}$ «٢٠ سم من $\frac{1}{4}$ »

٣١ أ يرتكز قضيب $\frac{1}{4}$ طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٠ نيوتن ويؤثر عند نقطة منتصفه فى وضع أفقى على حاملين ، أحدهما عند $\frac{1}{4}$ والآخر على بُعد ٢٥ سم من $\frac{1}{4}$ ما هو مقدار الثقل الذى يجب تعليقه عند الطرف $\frac{1}{4}$ للقضيب بحيث تصبح قيمة رد الفعل عند الحامل القريب من هذا الطرف مساوياً ستة أمثال قيمتها عند $\frac{1}{4}$ وما قيمتى ردى الفعل عندئذ ؟ «٤ ، ٢ ، ١٢ نيوتن»

٣٢ أ قضيب غير منتظم طوله ١٤٠ سم محمول أفقياً بخيطين رأسيين أحدهما عند $\frac{1}{4}$ والآخر يبعد ٤٠ سم من $\frac{1}{4}$ ، فإذا كان الشد فى الخيط الأول $\frac{1}{4}$ الشد فى الخيط الثانى ، فعين نقطة تأثير وزن القضيب. وإذا علم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من $\frac{1}{4}$ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب. «٦٠ سم حيث $\frac{1}{4}$ نقطة تأثير الوزن ، ٢٤ نيوتن»

٣٣ (دور اول ٢٠١١) قضيب \overline{AB} طوله ١٠٠ سم ووزنه ٢٠ نيوتن يؤثر عند نقطة منتصفه ، يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما يبعد ٣٠ سم عن A والآخر يبعد ٢٠ سم عن B أوجد مقدار الضغط الواقع على كل من الحاملين. ما هو مقدار الثقل الذي يجب تعليقه من الطرف B حتى يكون القضيب على وشك الدوران ؟ وما هي قيمة الضغط على الحامل الأقرب لنقطة B عندئذ ؟

١٢ ، ٨ ، ٢٠ ، ٥٠ نيوتن

٣٤ يرتكز قضيب \overline{AB} طوله ٦٠ سم ووزنه ٤٠٠ ث.جم يؤثر عند نقطة منتصفه على وتد يبعد ٢٠ سم من A حفظ القضيب أفقياً في حالة اتزان بواسطة خيط خفيف رأسى يتصل بطرفه B أوجد :

- ١) مقدار كل من الشد في الخيط ورد فعل التمدد.
 - ٢) مقدار الثقل الذي يلزم تعليقه من A ليجعل الشد في الخيط على وشك أن ينعدم.
- ١٠٠٠ ، ٢٠٠ ، ٢٠٠ ث.جم ، ٢٠٠ ث.جم

٣٥ قضيب منتظم طوله ١٤٠ سم ووزنه ١٥٠ ث.جم يرتكز أفقياً على حاملين يبعدان ٤٠ سم ، ٢٠ سم عن منتصفه على الترتيب. أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من كل طرف دون أن يختل توازن القضيب ومقدار الضغط على كل من الحاملين في كل حالة.

$$٢٠٠ = ١ \text{ ث.جم} ، ٢٥٠ = ٢ \text{ ث.جم} ، ٦٠ = ٣ \text{ ث.جم} ، ٢١٠ = ٤ \text{ ث.جم}$$

٣٦ \overline{AB} قضيب غير منتظم طوله ٨٠ سم ووزنه ٢٠ ث.كجم ، يرتكز في وضع أفقي على حاملين عند C ، D حيث : $A = C = D = B = ١٠$ سم ، عُلق من A ثقل قدره ٤٠ ث.كجم فأصبح القضيب على وشك الدوران حول C أوجد بعد نقطة تأثير وزن القضيب عن A ثم أوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من B دون أن يختل التوازن مع رفع الثقل المعلق من A

$$٢٠٠ \text{ سم} ، ٨٠ \text{ ث.كجم}$$

٣٧ (دور اول ٢٠٠٦) \overline{AB} قضيب غير منتظم يرتكز في وضع الاتزان أفقياً على حاملين أمليسين عند B ، C حيث : $A = B = ٦$ سم ، $C = D = ٧$ سم ونقطة تأثير وزن القضيب تقسمه بنسبة ٢ : ٣ من جهة الطرف A وجد أنه لو عُلق من الطرف A ثقل قدره ١٢٠ ثقل جرام أو من الطرف D ثقل قدره ١٨٠ ثقل جرام كان القضيب على وشك الدوران. أوجد وزن القضيب والبعد بين الحاملين.

$$٩٠٠ \text{ ث.جم} ، ٢٢ \text{ سم}$$

٣٨ **أ** قضيب غير منتظم طوله ١ متر يرتكز في وضع أفقى على حاملين عند $ح$ ، $د$ حيث :
 $ح = ٢٠$ سم ، $د = ١٠$ سم. فإذا كان أكبر ثقل يُعلق من الطرف $أ$ لحفظ
 التوازن $هـ$ ث. كجم. وأكبر ثقل يُعلق من $ب$ لحفظ التوازن $ز$ ث. كجم.
 أوجد وزن القضيب ونقطة تأثيره.
 « ٢٠ ث. كجم ، ٧٠ سم من $أ$ »

٣٩ **ب** يرتكز قضيب $أ$ طوله ٩٠ سم ووزنه ٥٠ نيوتن ويؤثر في نقطة منتصفه في وضع
 أفقى على حاملين ، أحدهما عند الطرف $أ$ والآخر عند نقطة تبعد ٢٠ سم عن $ب$ ويحمل
 ثقلاً مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة تبعد ١٥ سم عن $ب$ عيّن قيمة الضغط على كل من
 الحاملين ، أوجد أيضاً مقدار الثقل الذى يجب تعليقه من الطرف $ب$ بحيث يصبح القضيب
 على وشك الدوران وما هي قيمة الضغط على الحامل عندئذ ؟ $٧\frac{١}{٢}$ ، $٦٢\frac{١}{٢}$ ، ١٥ ، ٨٥ نيوتن.

٤٠ **أ** (دور اول ٢٠٠٧) قضيب منتظم طوله ١٠٠ سم ووزنه ١٠٠ نيوتن (يؤثر في منتصفه)
 $ح$ ، $د$ نقطتان عليه ، يرتكز القضيب أفقياً على حاملين أحدهما عند الطرف $أ$ والآخر عند
 النقطة $ح$ حيث : $ب = ٢٠$ سم علق ثقل مقداره ٨٠ نيوتن من نقطة $د$ حيث : $د = ١٠$ سم
 أوجد مقدار الضغط على كل من الحاملين ، ثم أوجد الثقل الذى يمكن تعليقه من الطرف
 $ب$ حتى يكون القضيب على وشك الدوران. « $٢٧\frac{١}{٢}$ ، $١٥٢\frac{١}{٢}$ ، ١١٠ نيوتن.

٤١ **أ** قضيب منتظم وزنه ٥٠ نيوتن وطوله ١٦٠ سم معلق بواسطة خيطين رأسيين عند $ح$
 $د$ ، حيث : $أ = ٤٠$ سم فإذا علق من الطرف $ب$ ثقل قدره ١٠ نيوتن ، أوجد الثقل
 الذى يجب تعليقه من الطرف $أ$ ليتزن القضيب في وضع أفقى ويكون الشد في الخيط عند
 $ح$ ضعف الشد في الخيط عند $د$
 « ٢٤ نيوتن »

٤٢ **أ** (دور اول ٢٠٠٨) قضيب غير منتظم طوله ٦٥ سم إذا ثبت عند طرفه $ب$ ثقل قدره ٢ نيوتن
 وعلق من $أ$ ثقل قدره ٧ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقياً عند نقطة تبعد ٢٠ سم من $أ$ وإذا انقص
 الثقل الموجود عند $أ$ وصار ٤.٢ نيوتن فإن القضيب يتزن أفقياً عند نقطة تبعد ٢٥ سم من $أ$
 أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن الطرف $أ$
 « ٥ نيوتن ، ٢٠ سم »

٤٣ **أ** قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ، وزنه ٣٠ نيوتن معلق من طرفيه في وضع أفقى بواسطة
 خيطين رأسيين لا يتحمل أى منهما شداً يزيد عن ٢٠ نيوتن. أوجد مواضع النقط التي
 يمكن أن يعلق منها ثقل مقداره ٧.٥ نيوتن دون أن يقطع أى من الخيطين.
 « على مسافة لا تقل عن ٤٠ سم من كل طرف »

٤٤ ساق منتظمة طولها ٨٠ سم ووزنها ٣ ثقل كجم عُلقَت من طرفيها في وضع أفقي بخيطين رأسيين كل منهما يتحمل شداً لا يزيد عن ٥ ثقل كجم. عيّن نقطة تعليق كتلة قدرها ٤ كجم دون أن ينقطع أى من الخيطين.
«على بُعد لا يقل عن ١٠ سم من أى من الطرفين»

٤٥ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ في الشكل المقابل :

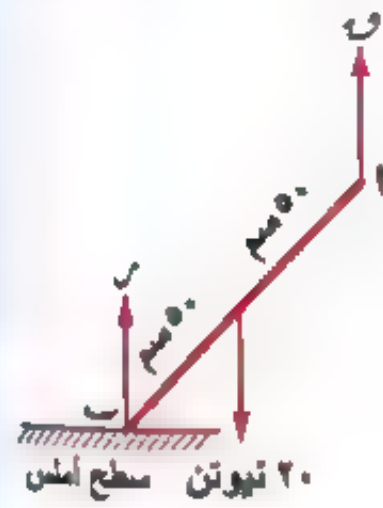


قضيب منتظم يرتكز على حامل عند منتصفه ، وضع عليه

جسم كما بالشكل ، أى من القوى الآتية تحدث توازن للقضيب ؟

- (أ) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بُعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب.
(ب) قوة مقدارها ١٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بُعد ٢٠ سم على يمين منتصف القضيب.
(ج) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأسفل تؤثر على بُعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب.
(د) قوة مقدارها ٣٠ نيوتن لأعلى تؤثر على بُعد ٥ سم على يسار منتصف القضيب.

٢ في الشكل المقابل :



أ ب قضيب منتظم ومترن تحت تأثير

القوى الموضحة بالشكل فإن : $W = \dots\dots\dots$ نيوتن.

- (أ) ٥
(ب) ١٠
(ج) ١٥
(د) ٢٠

٣ في الشكل المقابل :



أ ب قضيب منتظم وزنه ١٠ نيوتن

فإذا كان أكبر ثقل يمكن تعليقه من الطرف

أ دون أن يختل التوازن هو

فإن : $W = \dots\dots\dots$

- (أ) ٢٥ نيوتن. (ب) ٢٠ نيوتن. (ج) ١٥ نيوتن. (د) ٥ نيوتن.



أ- قضيب منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم

وطوله ٦٠ سم فإذا كان القضيب مرتكز في

وضع أفقى على وتد على بُعد ٢٠ سم من أ ،

ومُعلق من طرفه ب بخيط خفيف فإن : م - ص = ث.كجم

- (١) ١٠ (ب) ٣٠ (ج) ٤٠ (د) ٢٠

٥ ثلاث قوى متوازية م ، م ، م تؤثر على قضيب في النقط أ ، ب ، ح والتي تبعد ٢ سم ، ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب من أحد الطرفين فإذا كان القضيب متزن فإن : م : م : م =

- (١) ٣ : ٢ : ١ (ب) ١ : ٣ : ٢ (ج) ١ : ٢ : ٣ (د) ٢ : ٣ : ١

٦ أ- قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ٤ ث.كجم استند في وضع أفقى على وتدين

عند أ ، ح حيث : ب ح = ٢٠ سم. أثرت عليه قوة رأسية م عند الطرف ب فكان

القضيب على وشك الدوران حول ح فإن مقدار رد فعل الوتد عند

ح = ث.كجم

- (١) ٢ (ب) ٤ (ج) ٦ (د) ٨

٧ ساق خفيفة طولها ٣٦ سم معلقة أفقياً بخيطين رأسيين أحدهما مثبت في الساق من

نقطة على بُعد ٩ سم من أحد الطرفين والآخر من نقطة على بُعد ١٥ سم من الطرف

الآخر ومعلق من الطرفين ثقلان متساويان. فإذا كان كل من الخيطين يتحمل شداً لا

يزيد عن ٥٤ ثقل جم فإن أكبر قيمة لكل من الثقليين = ثقل جم

- (١) ١٨ (ب) ٣٦ (ج) ٤٢ (د) ٥٤

٦ تأثير القوى المستوية المتزنة والمتوازية م ، م ، م ، م في النقط

أ (١- ، ٢) ، ب (٣- ، ٤-) ، ح (٥ ، ٣) ، د (١- ، ٠) على الترتيب

فإذا كانت : م = ٣ س + ٤ ص ، م = ٢٠ نيوتن في نفس اتجاه م

أوجد كلاً من م ، م إذا كانتا تعملان في اتجاه مضاد لاتجاه م

م = ٩ س - ١٢ ص ، م = ٦ س - ٨ ص

٤٧ أثرت القوى المتوازية \vec{P}_1 ، \vec{P}_2 ، \vec{P}_3 ، \vec{P}_4 عند النقط

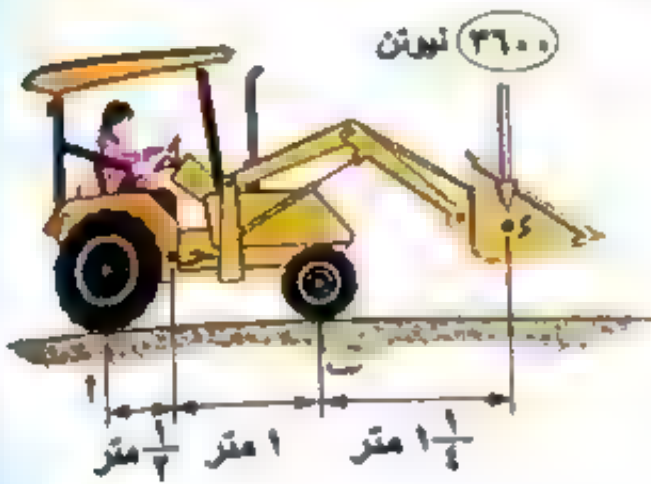
أ (١ ، ١) ، ب (١ ، ٢) ، ج (٢ ، ٠) ، د (٢ ، ٢) على الترتيب فائزنت فإذا كانت : $\vec{P}_1 = 2\vec{P}_2 + \vec{P}_3$ ، $\vec{P}_4 = 2\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ ، $\vec{P}_5 = 2\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ ، $\vec{P}_6 = 2\vec{P}_1 + \vec{P}_2$

أوجد كلاً من : \vec{P}_1 ، \vec{P}_2 ، \vec{P}_3 ، \vec{P}_4 ، \vec{P}_5 ، \vec{P}_6

$\vec{P}_1 = 2\vec{P}_2 + \vec{P}_3$ ، $\vec{P}_4 = 2\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ ، $\vec{P}_5 = 2\vec{P}_1 + \vec{P}_2$ ، $\vec{P}_6 = 2\vec{P}_1 + \vec{P}_2$

٤٨ في الشكل المقابل :

جرار وزنه ٨٤٠٠ نيوتن يؤثر في الخط الرأسى المار بالنقطة ج يستخدم في رفع ٢٦٠٠ نيوتن من المخلفات التي تؤثر في الخط الرأسى المار بالنقطة د حدد رد فعل الأرض على كل من العجلتين في وضع الاتزان.



٩٤٠٠ ، ٢٦٠٠ نيوتن

٤٩ في الشكل المقابل :

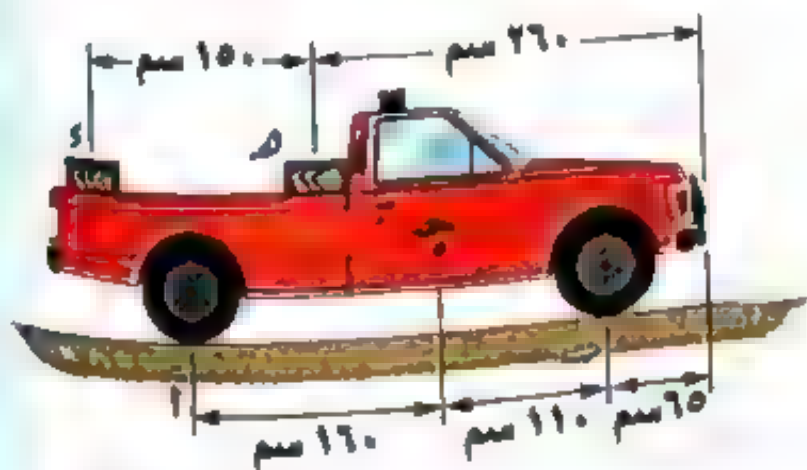
سيدة تستخدم عربة يد صغيرة وزنها ٦٠ نيوتن لنقل جوال من السماد وزنه ٢٥٠ نيوتن. ما هي القوة التي تؤثر على يدها في وضع الاتزان ؟



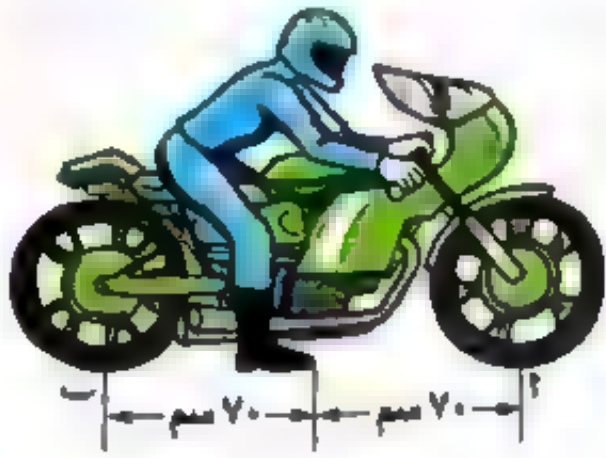
٨٤ نيوتن

٥٥ في الشكل المقابل :

عربة نصف نقل كتلتها ١٦٠٠ كجم ووزنها يؤثر في الخط الرأسى المار بالنقطة ج ووضع بصندوق العربة صندوقان د ، هـ كتلة الأول ٥٠٠ كجم وكتلة الثانى ٤٠٠ كجم في الوضع المبين بالشكل. أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين.



٩٢٠ ، ١٥٧٩.٦ نيوتن



دراجة نارية كتلتها ٢٠٠ كجم ووزنها يؤثر في الخط الرأسى العار بمنتصف المسافة بين مركزى العجلتين فإذا كانت كتلة راكب الدراجة ٨٤ كجم ووزنه يؤثر في الخط الرأسى الذى يبعد ١ متر خلف مركز العجلة الأمامية.

أوجد رد فعل الأرض على كل من العجلتين في كل من الحالتين الآتيتين :

① الدراجة بدون الراكب.

② الدراجة مع وجود الراكب.

١٠٠٠ ، ١٠٠ ث كجم ، ١٢٤ ، ١٦٠ ث كجم.

٥٢ أ لوح من الخشب طوله ٢٠ متر ووزنه ٦٠ ثقل كجم يؤثر عند منتصفه موضوع أفقيًا

بحيث يرتكز على حاملين عند ح ، و حيث : ١ ح = ٣ متر ، ٢ ح = ٥ متر فإذا سار

رجل وزنه ١٠٠ ثقل كجم على اللوح مبتدئًا من الطرف ١ نحوب

فأوجد أكبر مسافة يمكن أن يسيرها دون أن ينقلب اللوح. «١٨ متر»

٥٣ أ قضيب غير منتظم طوله ١٠٠ سم وزنه ٦٠ ث كجم معلق في منتصفه بخيط خفيف

رأسى وعندما عُلق ثقل ٣٠ ث كجم من أحد طرفيه اتزن في وضع أفقى. أوجد القوة

الرأسية التى يجب أن تؤثر في الطرف الآخر للقضيب (بعد رفع الثقل المعلق) ليظل متزن

في وضع أفقى. «الوزن على بعد ٧٥ سم من ١ ، ٣٠ ث كجم»

٥٤ كوبرى طوله ٦٠ مترًا ووزنه ٧٠ ثقل طن يؤثر عند منتصفه ويرتكز على دعامتين عند طرفيه

١ ، ٢ فإذا سارت سيارة كتلتها ٦ طن على الكوبرى. فأوجد الضغط على كلٍ من الدعامتين

عندما تكون السيارة :

② في منتصف الكوبرى.

① على بُعد ٢٠ متر من الطرف ١

③ على بُعد ٤٥ متر من الطرف ١

٣٩ ، ٣٧ ثقل طن ، ٣٨ ، ٣٨ ثقل طن ، ٣٦ ، ٣٩ ، ٣٩ ثقل طن.

٥٥ كوبرى طوله ٣٠ متراً ووزنه ٢٧ ثقل طن يؤثر فى منتصفه ويرتكز على دعامتين عند طرفيه
 ؟ ، ب فإذا سارت سيارة محملة بكتلتها ١٢ طن على الكوبرى فأوجد موقع السيارة على
 الكوبرى عندما يكون الضغط على الدعامة أ $\frac{3}{5}$ الضغط على الدعامة ب
 « $\frac{7}{13}$ متراً من أ »

٥٦ أ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٣٠٠ ثقل جرام مُعلق فى وضع أفقى من طرفيه
 بخيطين رأسيين. عُلِق فى القضيب الثقلان ٥٠٠ ، ١٠٠ ثقل جرام الأول على بُعد ٤٠ سم
 من الطرف أ والثانى على بُعد ٢٠ سم من الطرف ب أوجد الشد فى كل من الخيطين ثم
 أوجد موضع تعليق ثقل قدره ٦٠٠ ثقل جرام حتى يصبح الشدان فى الخيطين متساويين.
 « ٥٠٠ ، ٤٠٠ ثقل جم ، ٧٠ سم من أ »

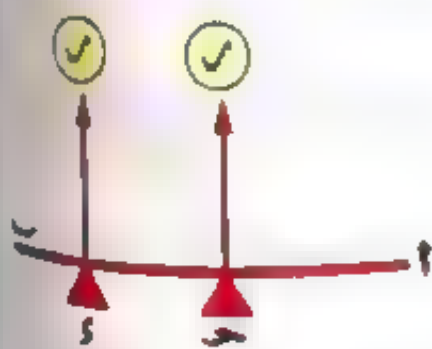
٥٧ مسطرة مدرجة منتظمة طولها متر ووزنها ٥٠ ثقل جم ترتكز فى وضع أفقى على حاملين
 أحدهما عند التدرج ١٠ والآخر عند التدرج ٩٠ فإذا كان كل من الحاملين يتحمل ضغطاً لا
 يزيد عن ٤٥ وزن جم فأوجد بين أى تدرجين بين الحاملين يمكن تعليق ثقل قدره ٢٥ ثقل جم
 دون أن يختل توازن المسطرة. « بين التدرجين ٢٦ ، ٧٤ أو عند أحدهما »

٥٨ أ ب قضيب منتظم طوله ١٢٠ سم ووزنه ٦٠ نيوتن يؤثر عند منتصفه ، يرتكز
 القضيب فى وضع أفقى على حامل عند طرفه ب ، ويحفظ فى حالة توازن بواسطة خيط
 رأسى مثبت من نقطة ح على بُعد ٤٠ سم من أ ويحمل ثقلًا مقداره ٢٠ نيوتن عند نقطة
 تبعد ٢٠ سم من أ عيّن قيمة الشد فى الخيط والضغط على الحامل ، وما هو مقدار الثقل
 الذى يجب تعليقه فى الطرف أ حتى يصبح القضيب على وشك الانفصال عن الحامل ،
 وما هى قيمة الشد فى الخيط عندئذ ؟
 « ٧٠٠ ، ١٠ نيوتن ، ٢٠ ، ١٠٠ نيوتن »

مسائل بقياس مستويات عليا من التفكير

٥٩ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ فى الشكل المقابل :



أ ب قضيب غير منتظم وزنه (و) يرتكز فى وضع أفقى
 على حاملين عند ح ، و فإذا كان ردى الفعل عند
 الحاملين متساوٍ فإن نقطة تأثير وزن القضيب تقع فى
 نقطة منتصف

(أ) أ ب (ب) ح و (ج) أ و (د) ب ح

٢ في الشكل المقابل :



قضيب منتظم \overline{AB} يرتكز في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند الطرف A والآخر عند نقطة C على القضيب فإذا تحرك رجل

من نقطة A متجهاً إلى B مع الاحتفاظ باتزان القضيب فإن :

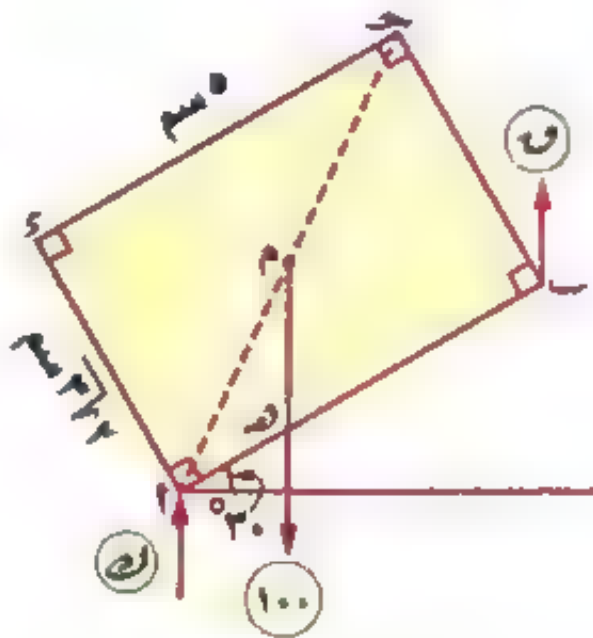
(أ) رد الفعل عند A يزداد ورد الفعل عند C يقل.

(ب) رد الفعل عند A يقل ورد الفعل عند C يزداد.

(ج) رد الفعل عند A ثابت ورد الفعل عند C ثابت.

(د) رد الفعل عند A يقل حتى يصل الرجل لمركز القضيب ثم يزداد تدريجياً.

٢ في الشكل المقابل :



إذا كانت الصفيحة $ABCD$ متزنة تحت تأثير القوى

الموضحة بالشكل فإن : $W - L = \dots$

(أ) 40

(ب) 50

(ج) 60

(د) 70

٦ يرتكز قضيب أفقي \overline{AB} على حاملين عند B ، C حيث : $AB = BC = CD$ ، وقد

وجد أن القضيب يكون على وشك الدوران إذا عُلق من نقطة A ثقل قدره M ثقل جم أو إذا

عُلق من نقطة D ثقل قدره N ثقل جرام أوجد وزن القضيب بدلالة M ، N وإذا كانت

$N = 2M = 10$ ث جم فأوجد وزن القضيب ثم أثبت أنه يؤثر في نقطة تقسم \overline{AB} بنسبة ٤ : ٥

« $(M + N)$ ، ١٥ ثقل جرام »

٦١ يحمل رجلان أ، ب جسمًا كتلته ٩٠ كجم مُعلق من قضيب معدني متين وخفيف ، فإذا كانت المسافة بين الرجلين ٦٠ سم وكانت نقطة تعليق الجسم تبعد ٢٠ سم من أ ، فما مقدار ما يتحمله كل من الرجلين من هذا الثقل ؟ وإذا كان الرجل ب لا يمكنه أن يحمل أكثر من ٥٠ ثقل كجم فعين أكبر مسافة من أ يمكن تعليق الثقل عندها حتى يتمكن الرجل ب من الاستمرار في حمل القضيب.

٦٢ أ قضيب طوله ١٢٠ سم يتزن إذا ارتكز طرفه أ على سطح الأرض وارتفع طرفه ب بتأثير قوة مقدارها ٧٢ ثقل كجم تؤثر رأسيًا إلى أعلى في نقطة تبعد عن ب مسافة ٢٠ سم. ويتزن القضيب أيضاً إذا ارتكز الطرف ب على الأرض وارتفع الطرف أ عنها بتأثير قوة مقدارها ٨٤ ثقل كجم تؤثر رأسيًا إلى أعلى في نقطة أ

أوجد : ١) وزن القضيب. ٢) بُعد نقطة تأثير وزنه عن أ « ١٤٤ ثقل كجم ، ٥٠ سم.



الاتزان العام

4



يمكنك حل
الامتحانات التفاعلية
على الدروس
من خلال مسح QR code
الخاص بكل امتحان

الدرس الأول الاتزان العام.

الاتزان العام

1

تعريف

إذا انعدم مجموع القوى لعدة قوى مستوية ($\vec{C} = \vec{0}$) وانعدم عزم المجموعة بالنسبة لكل نقطة ($\vec{C} = \vec{0}$) في مستوياتها قيل إن «مجموعة القوى متوازنة» وإذا أثرت مثل هذه المجموعة من القوى على جسم ما قيل إن هذا الجسم «متزن».

نظرية

إذا انعدم مجموع القوى لمجموعة ما من القوى المستوية وانعدم عزمها بالنسبة لنقطة واحدة في مستوياتها كانت هذه المجموعة متزنة.

البرهان :

نفرض أن عزم المجموعة بالنسبة لنقطة (و) ينعدم أى أن $\vec{C} = \vec{0}$ ،
 ، متجه مجموع القوى ينعدم ($\vec{C} = \vec{0}$)
 ، عزم المجموعة لا يتغير من نقطة لأخرى
 ، فإذا انعدم هذا العزم بالنسبة للنقطة (و) فإنه ينعدم بالنسبة لأى نقطة أخرى
 ، $\vec{C} = \vec{0}$ ينعدم بالنسبة لأى نقطة أخرى
 ، المجموعة متزنة.

(وهو المطلوب)

ملاحظة

عكس النظرية يكون صحيحًا دائمًا :
 أى أن : إذا كانت مجموعة القوى متوازنة فإن :
 • $\vec{C} = \vec{0}$ أى ينعدم مجموع (محصلة) القوى.
 • $\vec{C} = \vec{0}$ أى ينعدم عزم مجموعة القوى بالنسبة لأى نقطة.

بناء على النظرية السابقة نستنتج الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية :

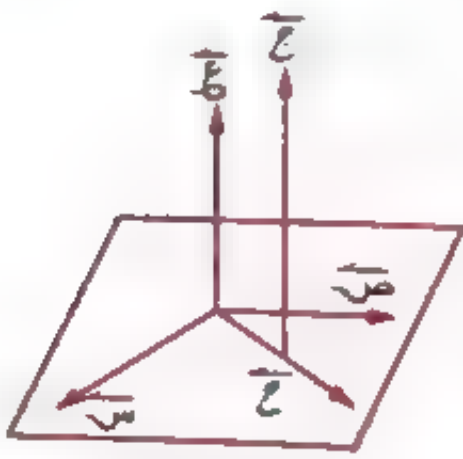
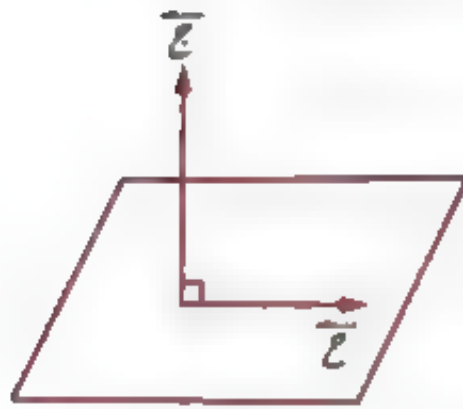
الشروط الكافية واللازمة لاتزان مجموعة من القوى المستوية

من النظرية السابقة نستنتج أن : لكي تتوازن مجموعة من القوى المستوية لابد أن يتحقق الشرطان التاليان :

- ① ينعدم متجه مجموع القوى.
- ② ينعدم عزم المجموعة بالنسبة لنقطة واحدة.

صيغة مكافئة للشروط الكافية واللازمة لاتزان

نعلم أن القوى المستوية المؤثرة تقع جميعها في مستوى واحد كما أن النقط التي ننسب إليها عزوم هذه القوى تقع أيضاً في نفس هذا المستوى. ومن ذلك نجد أن :



- ① متجه مجموع القوى وهو \vec{F} يقع في مستوى القوى.
- ② متجه عزم مجموعة القوى وهو \vec{G} بالنسبة لأي نقطة واقعة في مستوى القوى يكون عمودياً على هذا المستوى كما هو واضح بالشكل فإذا أدخلنا مجموعة متجهات الوحدة المتعامدة $\{\vec{S}, \vec{V}, \vec{G}\}$ بحيث يقع \vec{S} ، \vec{V} في مستوى القوى وبذلك يكون \vec{G} عمودياً على هذا المستوى وبذلك يمكن تحليل المتجه \vec{F} في اتجاهي \vec{S} ، \vec{V} بينما يوازي المتجه \vec{G} متجه الوحدة \vec{G} كما بالشكل الموضح :

$$\vec{F} = \vec{S} \cdot \vec{S} + \vec{V} \cdot \vec{V} , \vec{G} = \vec{G} \cdot \vec{G}$$

حيث : $\vec{S} =$ مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة في اتجاه \vec{S}

$\vec{V} =$ مجموع المركبات الجبرية لقوى المجموعة في اتجاه \vec{V}

$\vec{G} =$ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى منسوبة إلى متجه الوحدة \vec{G}

ومن ذلك نجد أنه إذا كان $\vec{S} = \vec{V} = \vec{G} = 0$ صفر

فإن : $\vec{F} = \vec{0}$ ، $\vec{G} = \vec{0}$ ، $\vec{G} = \vec{0}$ ، $\vec{S} = \vec{0}$ ، $\vec{V} = \vec{0}$ في المستوى

فإنه يمكن التوصل إلى الصيغة المكافئة التالية للشروط الكافية واللازمة لاتزان :

(المطلوب)

لكي تتوازن مجموعة من القوى يكفي ويلزم أن يتحقق الشرطان التاليان :

① ينعدم مجموع المركبات الجبرية للقوى في أى اتجاهين متعامدين واقعين في مستويها.

أى أن : $\sum S = 0$ ، $\sum V = 0$

② ينعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة في مستويها.

أى أن : $\sum M = 0$

ملاحظة

تظل الشروط الكافية واللازمة لتوازن مجموعة من القوى صحيحة في حالة أن يكون متجهها الوحدة \vec{S} ، \vec{V} غير متوازيين (ولكن ليس متعامدين بالضرورة).

ملاحظات هامة عند تحديد رد الفعل

① إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى أملس كان رد الفعل عمودياً على المستوى.

② إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان رد الفعل غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما رد الفعل العمودي وقوة الاحتكاك.

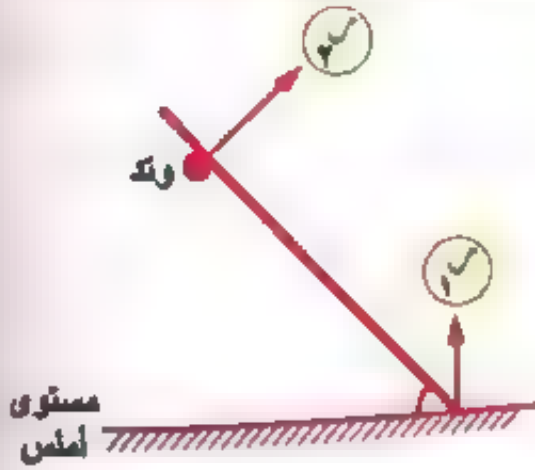
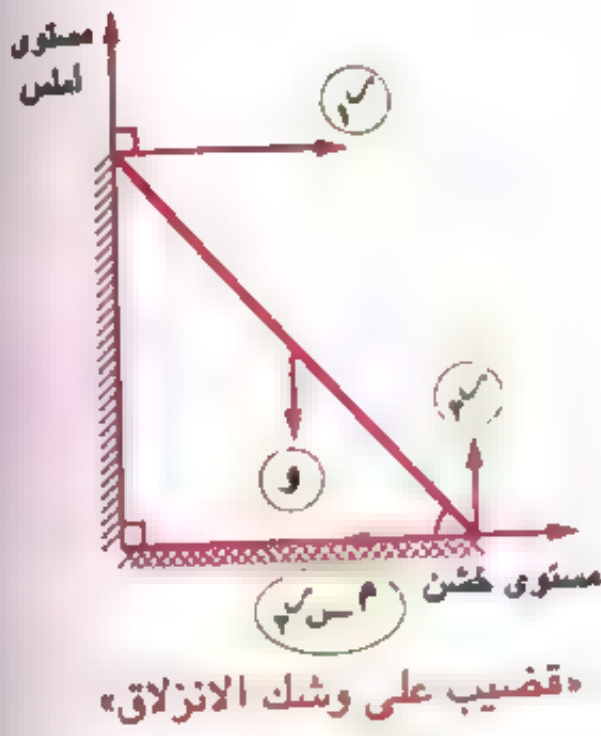
وإذا كان القضيب على وشك الحركة تكون المركبتين هما رد الفعل العمودي (R) ، قوة الاحتكاك النهائي (M).

③ إذا ارتكز قضيب بإحدى نقاطه الداخلية على (وتد - جسم آخر) كان رد الفعل عمودياً على القضيب.

④ رد فعل المفصل يكون غير معلوم الاتجاه ويمكن تحليله إلى مركبتين هما :

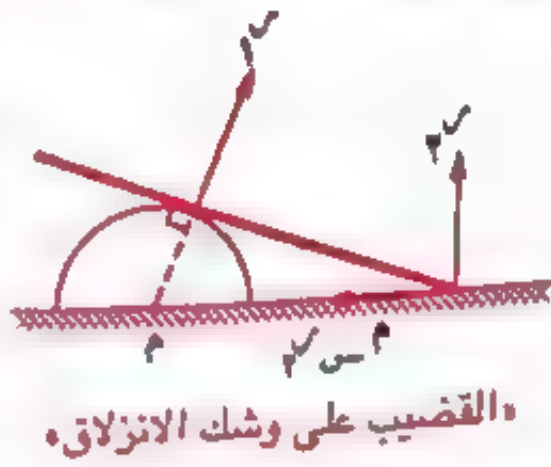
\vec{S} (في اتجاه \vec{AS})

، \vec{V} (في اتجاه \vec{AV})

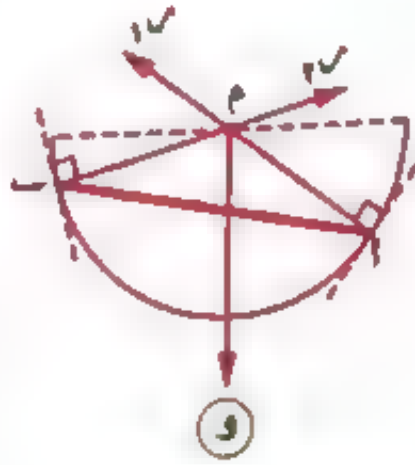




٥ رد فعل نصف كرة ملساء على قضيب
يستند مماسًا لسطحها يكون عموديًا على
القضيب مارًا بمركز الكرة.



٦ عندما يستند قضيب داخل سطح نصف
كروي أملس يكون رد الفعل عند طرفيه
عموديين على المماسين للكرة عند نقط
الارتكاز ويمران بمركز الكرة. ويستقر
القضيب في الوضع الذي يجعل الخط
الرأسي المار بمركز الكرة يمر بنقطة تأثير
الوزن على القضيب.



٧ عندما يستند قضيب AB على حافة وعاء
نصف كروي بإحدى نقطة (ح) فإن :
* رد الفعل عند A يكون عموديًا على
المماس للكرة عند A ويمر بمركز الكرة.
* رد الفعل عند B يكون عموديًا على
القضيب.



مثال ١

أب قضيب منتظم وزنه ٤ ثقل كجم وطوله ١٢ ديسم يتصل بأحد طرفيه بمفصل مثبت عند
طرفه A والمفصل مثبت في حائط رأسي. عُلِق ثقل قدره ٦ ثقل كجم من نقطة على القضيب
تبعد ٢ ديسم عن طرفه A ثم حُفِظَ القضيب في وضع أفقي بواسطة ربطه من B بحبل رفيع
 BC مثبت طرفه C بنقطة على الحائط تقع رأسيًا فوق A تمامًا وتبعد عن A مسافة ٩ ديسم.

أوجد : ١ مقدار الشد في الحبل.

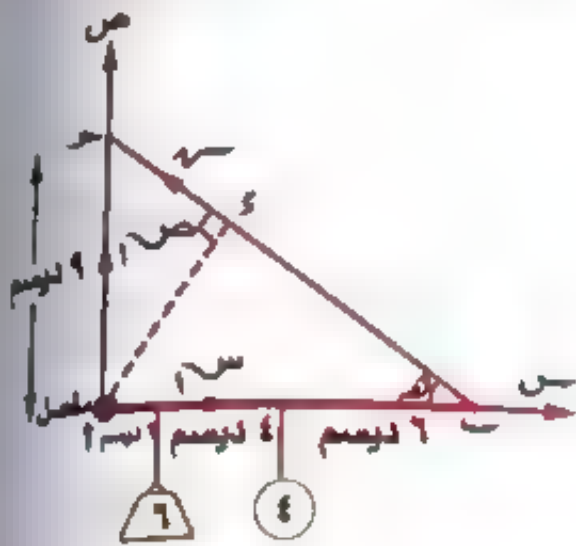
٢ مقدار واتجاه قوة رد فعل المفصل.

في Δ AB القائم الزاوية في A يكون $AB = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ ديسم

● القضيب متزن في وضع أفقي تحت تأثير القوى الآتية :

① قوة وزن القضيب ومقدارها ٤ ثقل كجم وتعمل رأسياً لأسفل عند نقطة منتصفه.

② قوة وزن الثقل المعلق ومقدارها ٦ ثقل كجم وتعمل رأسياً لأسفل عند نقطة من القضيب تبعد ٢ ديسم من المفصل.



③ قوة الشد في الحبل وتؤثر في الطرف B للقضيب ويميل خط عملها على الأفقي بزاوية قياسها 30° وتكون موجهة نحو الحائط ومقدارها T .

④ قوة رد فعل المفصل وتؤثر عند طرف القضيب A المتصل بالمفصل ونختار اتجاهين متعامدين \vec{A} ، \vec{A} وذلك لتحليل القوى وأحد هذين الاتجاهين أفقي وموجه بعيداً عن الحائط وهو \vec{A} ، الآخر رأسياً لأعلى وهو \vec{A} ثم نعتبر أن \vec{S} ، \vec{S} هما المركبتان الجبريتان لقوة رد فعل المفصل في هذين الاتجاهين حيث \vec{S} في اتجاه \vec{A} ، \vec{S} في اتجاه \vec{A} .

بكتابة الشروط الكافية لاتزان القضيب وهي :

انعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى في اتجاه \vec{A} (أي $\vec{S} = 0$)

$$\therefore \vec{S} - \vec{S} \sin 30^\circ = 0$$

$$\therefore \vec{S} = \frac{4}{0.5} = 8$$

(١)

، انعدام مجموع المركبات الجبرية للقوى في اتجاه \vec{A} (أي $\vec{S} = 0$)

$$\therefore \vec{S} + \vec{S} \cos 30^\circ - 6 - 4 = 0$$

$$\therefore \vec{S} + \vec{S} \frac{\sqrt{3}}{2} = 10$$

(٢)

، انعدام مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة لنقطة واحدة ولتكن A مثلاً

$$\therefore \vec{S} \times 15 - 6 \times 2 - 4 \times 7.5 = 0$$

الدرس الاول

حيث ℓ طول العمود الساقط من A على BC ، $\ell = 12 - 24 = 12$ ، $\frac{24}{\ell} = \frac{2}{0} \times 12 = 24$ ، $\frac{24}{\ell}$ ليس

$$\therefore \frac{24}{\ell} = 24$$

$$\therefore \ell = 24 \text{ ثقل كجم}$$

(المطلوب أولاً)

\therefore مقدار الشد في الحبل $\ell = 24$ ثقل كجم

وبالتعويض في (١) : $\therefore \ell = 24$ ، $\ell \times \frac{2}{0} = 24$

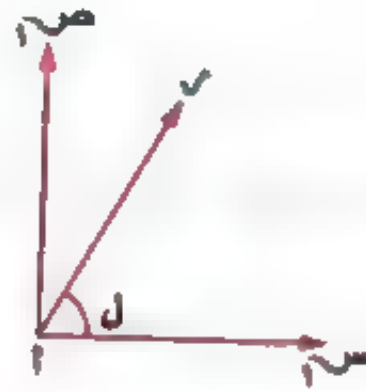
وبالتعويض في (٢) عن مقدار ℓ

$$\therefore \ell = 24 \text{ ثقل كجم}$$

وبذلك يمكن تعيين مقدار واتجاه قوة رد فعل المفصل

وبفرض أن ℓ هو مقدار هذه القوة ، ℓ قياس زاوية

ميل خط عملها على BC كما هو موضح بالشكل



$$\therefore \ell = 24 \text{ ثقل كجم}$$

$$\therefore \ell = 24$$

$$\ell = 24 = \frac{24}{\ell} = \frac{24}{24}$$

\therefore مقدار قوة رد فعل المفصل $\ell = 24$ ثقل كجم وتصنع زاوية قياسها 60° مع BC

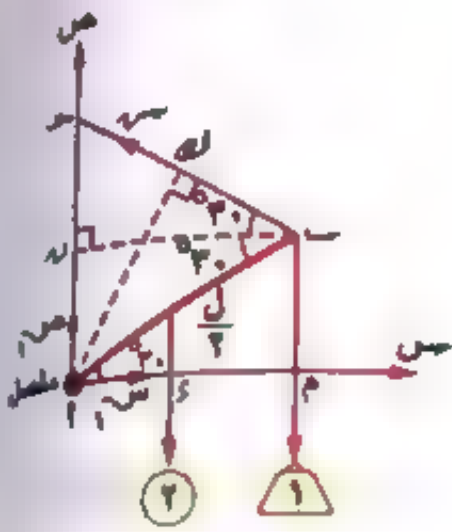
(المطلوب ثانياً)

مثال ١

أب قضيب منتظم وزنه ٢ نيوتن يتصل طرفه A بمفصل مثبت في حائط رأسي ويحمل عند طرفه B ثقل قدره نيوتن واحد. حفظ القضيب في وضع يميل فيه على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها 60° بواسطة حبل مساوٍ للقضيب في الطول ، يتصل أحد طرفيه بالطرف B للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة C من الحائط تقع رأسياً أعلى A وعلى بُعد منها يساوى طول القضيب.

(٢) مقدار قوة رد فعل المفصل عند A

(١) مقدار الشد في الحبل.



نفرض أن طول القضيب يساوي L ليكون ΔABC متساوي الأضلاع وقياس كل زاوية من زواياه الداخلة 60° ، يرسم $\vec{r}_B \perp \vec{r}_C$

$\therefore \vec{r}_B = (د ح ب ر) = \vec{r}_C = (د ا ب ر) = 20^\circ$ ونفرض أن المركبتين الجبريتين لرد فعل المفصل عند B هما \vec{r}_B ، \vec{r}_C في الاتجاهين المتعامدين \vec{r}_B ، \vec{r}_C كما في الشكل.

• بتحليل القوى في اتجاه \vec{r}_B حيث $\vec{r}_B = 0$:

$$\therefore \vec{r}_B = \vec{r}_C - \vec{r}_B \cos 20^\circ = 0$$

• وتحليل القوى في اتجاه \vec{r}_C حيث $\vec{r}_C = 0$:

$$\therefore \vec{r}_C = \vec{r}_B \sin 20^\circ - 1 - 2 = 0$$

، \therefore مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة $B = 0$

$$\therefore -2 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times \vec{r}_B = 0$$

$$\therefore -2 \times \frac{L}{4} - 1 \times L + 1 \times L \cos 60^\circ = 0$$

$$\therefore -\frac{L}{2} - L + L \cos 60^\circ = 0$$

$$\therefore \vec{r}_B = 2 \text{ نيوتن}$$

\therefore مقدار قوة الشد في الحبل $= 2$ نيوتن.

(المطلوب أولاً)

$$\text{وبالتعويض في (1)} : \therefore \vec{r}_B = 2 \times \frac{L}{4} = 1 \text{ نيوتن}$$

$$\text{وبالتعويض في (2)} : \therefore \vec{r}_C = 2 \times \frac{1}{4} - 1 - 2 = -2.5 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{مقدار قوة رد فعل المفصل } R = \sqrt{1^2 + (-2.5)^2} = 2.69 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore \text{مقدار قوة رد فعل المفصل عند } B = 2.69 \text{ نيوتن.}$$

(المطلوب ثانياً)

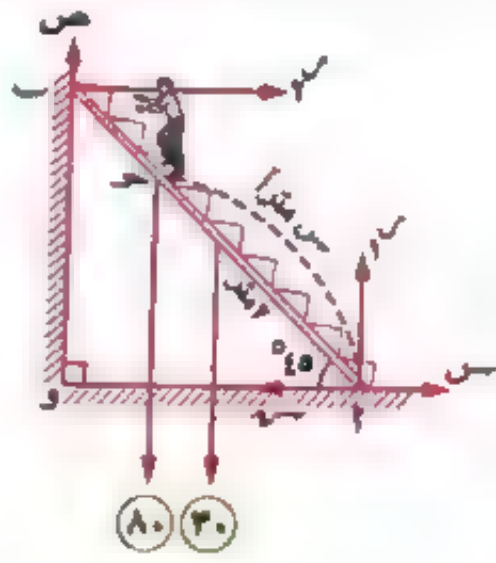
مثال ٣

أ- سلم منتظم وزنه ٢٠ ثقل كجم وطوله ٤ أمتار يرتكز بطرفه ١ على مستوى أفقي أملس وبطرفه ٢ على حائط رأسي أملس. حفظ السلم في مستوى رأسي وفي وضع يعيل فيه على الأفقي بزاوية قياسها ٤٥° بواسطة حبل أفقي يصل الطرف ١ بنقطة من المستوى الأفقي تقع رأسيًا أسفل ٢ تمامًا ، فإذا صعد رجل وزنه ٨٠ ثقل كجم على هذا السلم فثبت أن مقدار الشد في الحبل يزداد كلما صعد الرجل وإذا كان الحبل لا يتحمل شداً يزيد مقداره على ٦٧ ثقل كجم فأوجد طول أكبر مسافة يمكن أن يصعد بها الرجل دون أن ينقطع الحبل.



الحل

السلم متزن تحت تأثير القوى الآتية :



① قوة وزن السلم ومقدارها ٢٠ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة منتصفه (لأن السلم منتظم).

② قوة وزن الرجل الصاعد على السلم ومقدارها ٨٠ ثقل كجم وتعمل رأسيًا لأسفل عند نقطة من نقط السلم مثل حـ

③ قوة رد فعل المستوى الأفقي (الأرض) عند الطرف ١ ومقدارها R_A واتجاهها لأعلى عمودية على الأرض.

④ قوة رد فعل الحائط عند الطرف ٢ ومقدارها R_B واتجاهها أفقيًا وعمودية على الحائط

⑤ قوة الشد في الحبل (T) وبأخذ الاتجاهين المتعامدين T_x و T_y ، و T_x حيث و نقطة في المستوى الأفقي تقع رأسيًا أسفل ٢ ونفرض أن الرجل صعد مسافة x مترًا على السلم. وبالتحليل في الاتجاهين T_x و T_y ، و T_x مع كتابة الشروط الكافية لاتزان السلم نجد أن :

$$\textcircled{1} \quad T_x = T_y = 0 \quad \therefore T_x = T_y$$

$$\textcircled{2} \quad T_x = 80 - 20 - T_y \quad \therefore T_x = 60 - T_y$$

$$\therefore \text{مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة ١ = صفر}$$

$$\therefore 20 \times 2 \sin 45^\circ + 80 \times x \sin 45^\circ - T_y \times 4 \cos 45^\circ = 0$$

ب أولاً

ث

ثانيًا

الدرس الأول

⑤ قوة الاحتكاك النهائية عند الطرف ب ومقدارها $\frac{1}{4} \text{ م}$ وموجهة رأسياً لأعلى. نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه السلم ونأخذ فيه الاتجاهين المتعامدين $\overrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ص}}$ حيث حـ نقطة على الأرض الأفقية تقع رأسياً أسفل ب بتحليل القوى فى الاتجاهين $\overrightarrow{\text{حـ س}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ ص}}$ مع كتابة الشروط الكافية لاتزان السلم.

نجد أن : $\text{م} - \frac{2}{3} \text{ م} = 0$ $\therefore \frac{2}{3} \text{ م} = \text{م}$ (١)

$\text{م} + \frac{1}{4} \text{ م} - \text{و} = 0$ $\therefore \frac{1}{4} \text{ م} + \text{م} = \text{و}$ (٢)

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة أ = صفر

$\therefore \text{و} \times \text{ل حـ م} - \text{م} \times 2 \times \text{ل حـ م} - \frac{1}{4} \text{ م} \times 2 \times \text{ل حـ م} = \text{صفر}$

(حيث م قياس زاوية ميل السلم على الأرض)

$\therefore \text{و حـ م} - 2 \text{ م حـ م} - \frac{2}{4} \text{ م حـ م} = \text{صفر}$ (٣)

، من المعادلة (١) : $\frac{2}{3} \text{ م} = \text{م}$

وبالتعويض فى (٢) : $\frac{1}{4} \text{ م} + \frac{2}{3} \text{ م} = \text{و}$

$\therefore \frac{1}{4} \text{ م} = \text{و}$ $\therefore \frac{2}{8} = \text{م}$

وبالتعويض فى (٣) :

$\therefore \text{و حـ م} - 2 \times \frac{2}{8} \text{ م حـ م} - \frac{2}{4} \times \frac{2}{8} \text{ م حـ م} = \text{صفر}$ (وبقسمة الطرفين على و)

$\therefore \text{حـ م} - \frac{2}{4} \text{ م حـ م} - \frac{2}{4} \text{ م حـ م} = \text{صفر}$ $\therefore \frac{2}{4} \text{ م حـ م} - \frac{2}{4} \text{ م حـ م} = 0$

$\therefore \text{حـ م} = \text{م}$ $\therefore \text{م} = 45^\circ$

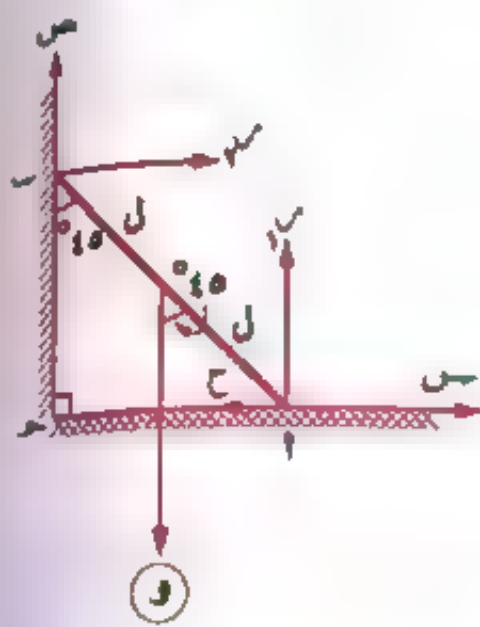
∴ قياس زاوية ميل السلم على الأرض الأفقية يساوى 45°

مثال ٥

أب سلم منتظم وزنه (و) يستند بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستو رأسى ويميل على الحائط بزاوية قياسها 45° فإذا كان السلم متزنًا

فأثبت أن : ① معامل الاحتكاك السكوني بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{1}{4}$
 ② إذا كان معامل الاحتكاك السكوني يساوي $\frac{1}{4}$ فإن مقدار القوة الأفقية التي تؤثر عند
 ؟ وتجعله على وشك الحركة نحو الحائط تعادل $\frac{1}{4}W$ و

الحل



① ليكن السلم هو AB وطوله L ، M قوة رد الفعل العمودي عند الطرف A المستند على الأرض الخشنة ، N قوة رد الفعل عند الطرف B المستند على الحائط الأملس ، H قوة الاحتكاك عند A ، نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه السلم ونأخذ فيه اتجاهين متعامدين.

\vec{H} ، \vec{H} (كما بالشكل) حيث H نقطة على الأرض الأفقية تقع رأسياً أسفل B نلاحظ أن الاتجاه المحتمل لحركة الطرف A يكون بعيداً عن الحائط ولذلك يجب أن تكون قوة الاحتكاك H موجهة نحو الحائط.

بتحليل القوى في اتجاه \vec{H} : $\therefore H - N = 0$ $\therefore H = N$ (١)

بتحليل القوى في اتجاه \vec{W} : $\therefore W - V = 0$ $\therefore W = V$ (٢)

، \therefore مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة A = صفر

$$\therefore W \times L \sin 45^\circ - N \times L \cos 45^\circ = 0 \text{ (ويقسمة الطرفين على } L \sin 45^\circ \text{)}$$

$$\therefore W - N = 0 \quad \therefore W = N \quad \therefore \frac{W}{4} = N \quad (٣)$$

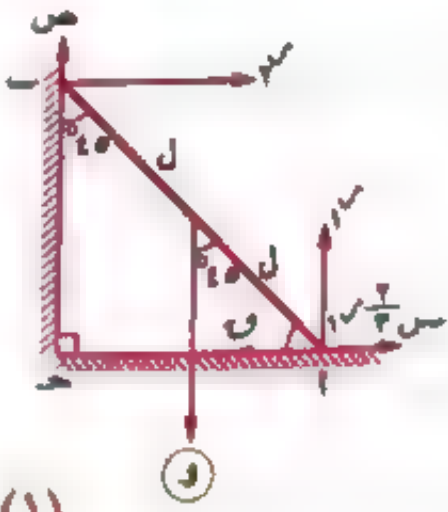
من (١) ، (٣) : $\therefore H = \frac{W}{4}$ ولكن $H \geq 0$ $\therefore \frac{W}{4} \geq 0$

وبالتعويض فى هذه المتبانية عن كل من N ، H :

$$\therefore \frac{W}{4} \geq 0 \quad \therefore \mu \geq \frac{1}{4}$$

\therefore معامل الاحتكاك السكوني بين السلم والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{1}{4}$ (المطلوب أولاً)

الدرس الاول



(1)

$$\therefore \frac{2}{3}W + \frac{1}{3}W = 0$$

(2)

$$\therefore \frac{1}{3}W = 0$$

∴ مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة إلى 1 = صفر

$$\therefore W \times L \sin 45^\circ - \frac{1}{3}W \times 2L \cos 45^\circ = 0 \quad (\text{وبقسمة الطرفين على } \frac{L}{\sqrt{2}})$$

(3)

$$\therefore \frac{1}{3}W = 0$$

وبالتعويض من (2)، (3) في (1) ينتج أن :

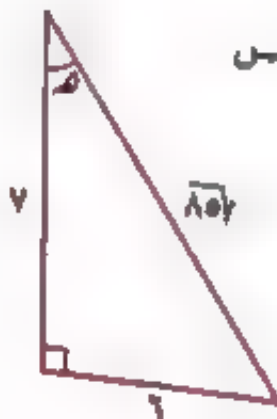
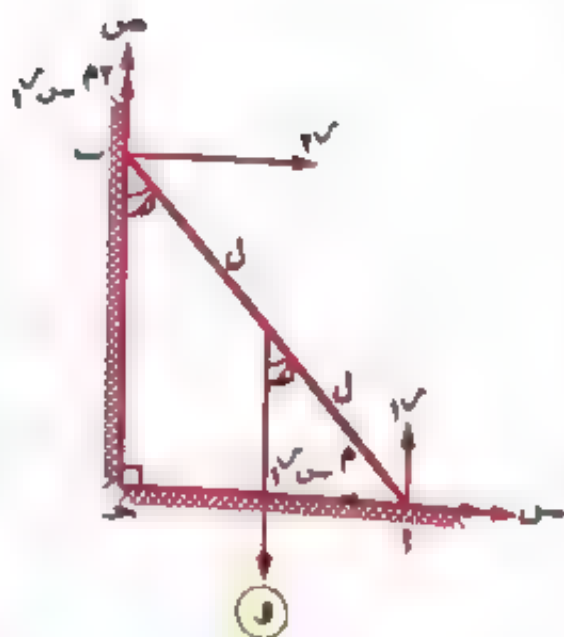
(المطلوب ثانياً)

$$\therefore \frac{1}{3}W = 0$$

$$\therefore \frac{1}{3}W + \frac{2}{3}W = 0$$

مثال 6

ساق منتظمة وزنها (و) ترتكز بطرفها السفلى 1 على أرض أفقية وترتكز بطرفها العلوى 2 على حائط رأسى وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والحائط يساوى ضعف معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض ، فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تصنع مع الحائط زاوية ظلها $\frac{7}{11}$ فثبت أن مقدار رد فعل الحائط يساوى $\frac{13\sqrt{2}}{11}W$



نفرض أن طول الساق = L

معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض = μ

قياس زاوية ميل الساق على الرأسى = θ

$$\therefore \tan \theta = \frac{7}{11} \quad \therefore \theta = \tan^{-1} \frac{7}{11}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{7}{\sqrt{154}}$$

المحاضر (استاتيكا - شرح) ١٤٤ / ١٤٥ ثانوى ٢٠٩

بتحليل القوى في اتجاه حـ س :

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

بتحليل القوى في اتجاه حـ ص :

$$0 = 1 \text{ م} + 2 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م}$$

$$(1) \quad 1 \text{ م} = 2 \text{ م}$$

$$(2) \quad 1 \text{ م} + 2 \text{ م} = 2 \text{ م}$$

، مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة 1 = صفر

$$0 = 1 \text{ م} \times 2 - 2 \text{ م} \times 2 = 2 \text{ م} - 4 \text{ م} = -2 \text{ م}$$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

$$0 = \frac{1}{80} \times 2 - \frac{2}{80} \times 2 = \frac{2}{80} - \frac{4}{80} = -\frac{2}{80}$$

$$(2) \quad 0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

وبالتعويض في (1) : $1 \text{ م} = 2 \text{ م}$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

$$0 = \frac{1}{80} \times 2 - \frac{2}{80} \times 2 = \frac{2}{80} - \frac{4}{80} = -\frac{2}{80}$$

[وبقسمة الطرفين على 2 ، الضرب في (1 + 2 م)]

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

وبالتعويض في (1) : $1 \text{ م} = 2 \text{ م}$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

$$0 = 1 \text{ م} - 2 \text{ م} = 1 \text{ م} - 2 \text{ م}$$

رد فعل الحائط هو رد الفعل المحصل (م) عند أي محصلة م ، 2 م

∴ رد فعل الحائط عند ب = $\sqrt{(2\text{ م})^2 + (2\text{ م})^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ م

$$= 2\sqrt{2} \text{ م} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \text{ م} \quad \text{و} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ م}$$

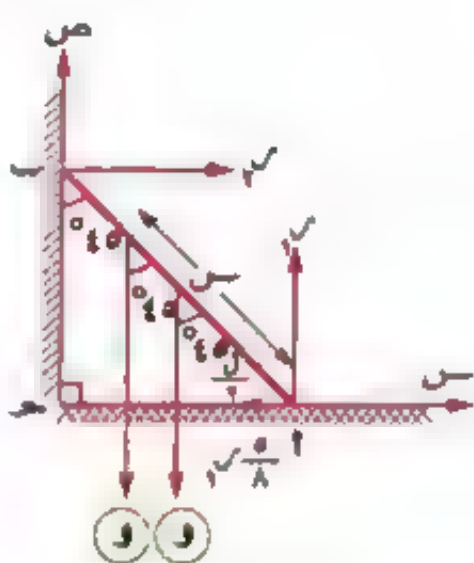
∴ رد فعل الحائط عند ب = $\frac{2\sqrt{2}}{11}$ و

(وهو المطلوب)

مثال ٧

يستند سلم منتظم وزنه (و) بطرفه السفلى ١ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ب على حائط رأسى أملس بحيث يقع السلم فى مستو رأسى ويميل على الحائط بزاوية قياسها 45° فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض $\frac{5}{8}$ فأوجد طول المسافة التى يمكن أن يصعد بها رجل وزنه يساوى وزن السلم قبل أن ينزلق ثم أوجد بدلالة وزن السلم مقدار أقل قوة أفقية تؤثر عند منتصف السلم لكى يتمكن الرجل من الصعود حتى نهاية السلم.

الحل



١) نفرض أن طول السلم يساوى ل وأن الرجل صعد على السلم مسافة طولها س قبل أن ينزلق السلم أى السلم على وشك الانزلاق وبذلك تكون قوة الاحتكاك النهائية عند الطرف ١ = $\frac{5}{8} \text{ م}$ موجهة نحو الحائط.

بتحليل القوى فى اتجاه حـ س :

$$(١) \quad \therefore \frac{5}{8} \text{ م} = 2 \text{ م} \quad \therefore \frac{5}{8} \text{ م} - 2 \text{ م} = 0$$

بتحليل القوى فى اتجاه حـ ص :

$$(٢) \quad \therefore 2 \text{ م} = 1 \text{ م} \quad \therefore 2 \text{ م} - 1 \text{ م} = 1 \text{ م}$$

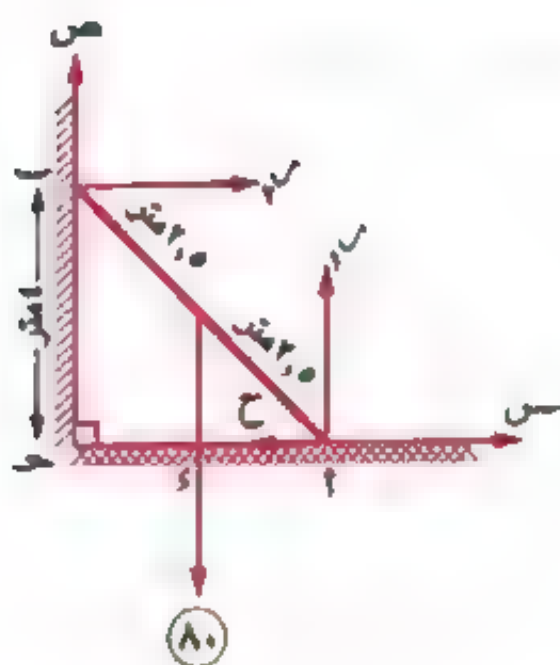
∴ ج = صفر :

$$\therefore 0 = \frac{1}{4} \text{ م} \times 45^\circ + 2 \text{ م} \times 45^\circ - 1 \text{ م} \times 45^\circ$$

(ويقسمة الطرفين على 45°)

١ سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٨٠ ثقل كجم يستند بطرفه ١ على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكوني بينها وبين السلم $\frac{1}{4}$ ويرتكز بطرفه ٢ على حائط رأسي أملس. أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن عندما يكون الطرف ٢ على بعد ٤ متر من سطح الأرض. ثم أوجد مقدار أصغر وزن لجسم يوضع على الأرض عند طرف السلم ١ حتى يمنع من الانزلاق علماً بأن معامل الاحتكاك السكوني بين الأرض والجسم $\frac{2}{3}$

الحل



① $١-٢ = ٤$ متر ، $١-٢ = ٥$ متر

$\therefore ١-٢ = ٣$ متر $\therefore ١-٢ = ١,٥$ متر

بفرض أن $ح$ هي مقدار قوة الاحتكاك عند الطرف ١
وحيث أنها لازمة لحفظ السلم في حالة توازن فهي
تكون موجهة نحو الحائط ثم نقارن مقدار هذه القوة
بمقدار قوة الاحتكاك النهائي عند ١

(١) بتحليل القوى في اتجاه $ح-١$: $\therefore ٠ = ح - ٢٠ \therefore ح = ٢٠$

(٢) بتحليل القوى في اتجاه $ح-٢$: $\therefore ٠ = ٨٠ - ٢٠ \therefore ٨٠ = ٢٠$

\therefore مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة ١ = صفر

$\therefore ٨٠ \times ١,٥ - ٢٠ \times ٤ = صفر$ $\therefore ٢٠ = ٢٠$ ثقل كجم

\therefore من (١) يكون مقدار قوة الاحتكاك عند الطرف ١ اللازمة لحفظ السلم في حالة توازن

هي $ح = ٢٠$ ثقل كجم

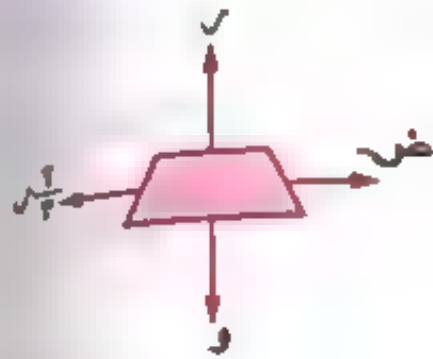
وحيث مقدار قوة الاحتكاك النهائية عند ١ $٢٠ = ٨٠ \times \frac{1}{4} = ٢٠$ ثقل كجم

$\therefore ح < ٢٠$ (وهذا تعارض)

∴ السلم لا يمكن أن يتزن إذا كان بُعد الطرف ب للسلم عن

سطح الأرض ٤ متر.

(المطلوب أولاً)



٢) نفرض أن مقدار وزن الجسم المطلوب وضعه على الأرض

عند طرف السلم (٢) = و ، مقدار قوة رد الفعل العمودي

المؤثرة على هذا الجسم = ن فيكون الجسم متزنًا تحت

تأثير قوة وزنه ومقدارها (و) ، رد الفعل العمودي ومقدار (ن) ،

ضغط السلم على الجسم ومقداره (ض) وقوة الاحتكاك النهائي

(ف) لأن الجسم الموضوع عند (٢) على وشك الحركة

حيث $ض = \frac{2}{3} ن$ ∴ $ض = \frac{2}{3} و$

∴ مقدار ضغط الجسم على السلم $= \frac{2}{3} و$ ويكون موجهاً نحو الحائط كما بالشكل.

بتحليل القوى في الاتجاه $ح-ص$:

$$∴ ٠ = ١ ن - \frac{2}{3} و - \frac{1}{4} ن$$

$$∴ ١ ن - \frac{2}{3} و + \frac{1}{4} ن = ٠$$

بتحليل القوى في الاتجاه $ح-ص$:

$$∴ ٠ = ٨٠ - ١ ن$$

$$∴ ٨٠ = ١ ن$$

وبالتعويض من (٢) في (١) : $٢٠ + و = \frac{2}{3} ن$

ولكن من المطلوب أولاً وجدنا أن مقدار القوة اللازمة لمنع السلم من الانزلاق = ٣٠ ثقل كجم

أي : $٣٠ = ١ ن$ ثقل كجم

وبالتعويض في (٢) : $٢٠ + و = \frac{2}{3} ٣٠$

$$∴ ١٠ = و$$

∴ و = ١٥ ثقل كجم

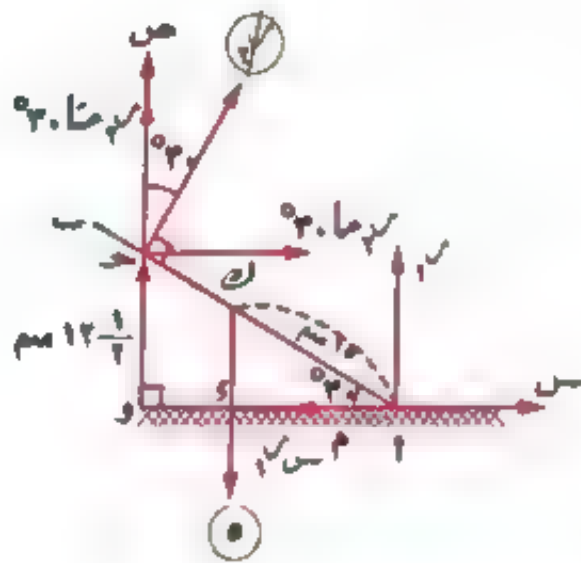
(المطلوب ثانياً)

ساق منتظمة وزنها ٥ ثقل كجم وطولها ٣٠ سم ترتكز بطرفها ١ على أرض أفقية خشنة وترتكز عند إحدى نقطتها ٢ على وتد أملس يعلو عن سطح الأرض بمقدار $12\frac{1}{4}$ سم فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق عندما كانت تميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها 30° فابعد : (١) مقدار قوة رد فعل الوتد.

(٢) معامل الاحتكاك السكوني بين طرف الساق ١ والأرض.

الحل

الساق متزنة تحت تأثير القوى الآتية :



(١) قوة وزن الساق ومقدارها ٥ ثقل كجم وتؤثر رأسياً لأسفل عند نقطة ٢ منتصف الساق (لأن الساق منتظمة).

(٢) قوة رد الفعل العمودي عند الطرف ١ الملامس للأرض ومقدارها M_1 رأسية لأعلى وعمودية على الأرض.

(٣) قوة رد الفعل عند النقطة ٢ من الساق ومقدارها M_2 وهي عمودية على الساق.

(٤) قوة الاحتكاك عند ١ ومقدارها M_3 وهي موجهة نحو و

نعتبر المستوى الرأسى الذى يتزن فيه الساق وتأخذ فيه W و V اتجاهان متعامدان

لتحليل القوى حيث (و) نقطة فى المستوى الأفقى تقع رأسياً أسفل (ح)

نحلل القوة M_2 إلى مركبتين متعامدتين فى الاتجاهين W و V ، و V

فنجدهما $M_2 \sin 30^\circ$ ، $M_2 \cos 30^\circ$

بتحليل القوى فى الاتجاه W :

$$M_2 \sin 30^\circ - M_3 = 0$$

$$M_2 \cos 30^\circ = M_3$$

$$(1) \quad M_2 = 2 M_3$$

بتحليل القوى في الاتجاه \vec{H} و \vec{V} :

$$\therefore \vec{H} + \vec{H}_A = 0 \quad \text{صفر} \quad \therefore \vec{H} + \vec{H}_A = 0 \quad \text{صفر}$$

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى بالنسبة للنقطة $A = 0$ صفر

$$\therefore \vec{H} \times 0 - 5 \times 10 = 0 \quad \text{صفر حيث } 5 \times 10 = 50 \quad \therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$$

$\therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$ (لأن ΔA و ΔB ثلاثيني ستيني)

$$\therefore \vec{H} = 50 \text{ سم} \quad \therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$$

(المطلوب أولاً)

\therefore مقدار قوة رد فعل الوتد عند النقطة $A = \frac{50}{2} = 25 \text{ ثقل كجم}$

وبالتعويض عن قيمة \vec{H} في المعادلة (2):

$$\therefore \vec{H} = 50 \text{ سم} \quad \therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$$

وبالتعويض في (1):

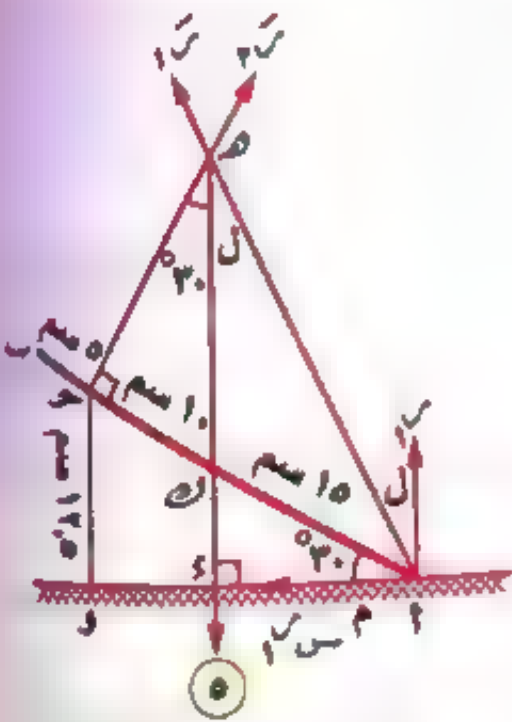
$$\therefore \vec{H} = 50 \text{ سم} \quad \therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$$

(المطلوب ثانياً)

$$\therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$$

حل آخر:

من هندسة الشكل:



من ΔA : $\vec{H} = 50 \text{ سم}$ ، $\vec{H} = 50 \text{ سم}$ ، $\vec{H} = 50 \text{ سم}$

من ΔB : $\vec{H} = 50 \text{ سم}$ ، $\vec{H} = 50 \text{ سم}$ ، $\vec{H} = 50 \text{ سم}$

من ΔC : $\vec{H} = 50 \text{ سم}$ ، $\vec{H} = 50 \text{ سم}$ ، $\vec{H} = 50 \text{ سم}$

$$\therefore \vec{H} = 50 \text{ سم} \quad \therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$$

\therefore معامل الاحتكاك السكوني $\mu = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

وباستخدام قاعدة لامي:

$$\therefore \vec{H} = 50 \text{ سم} \quad \therefore \vec{H} = 50 \text{ سم}$$

على الاتزان العام

اختبار تفاعلي



من أسئلة الكتاب المدرسي

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ① الشرط اللازم والكافى لاتزان مجموعة من القوى هو
 (أ) انعدام متجه مجموع القوى.
 (ب) أن تكون متلاقية فى نقطة.
 (ج) أن تكون متوازية.
 (د) انعدام متجه مجموع القوى وانعدام متجه عزوم القوى حول أى نقطة.
- ② إذا كان متجه محصلة القوى لمجموعة من القوى المستوية هو \vec{H} ، مجموع عزوم القوى بالنسبة لنقطة هو \vec{H} فإن شرط اتزان مجموعة القوى المستوية هو
 (أ) $\vec{H} = \vec{0}$ ، $\vec{H} = \vec{0}$
 (ب) $\vec{H} \neq \vec{0}$ ، $\vec{H} = \vec{0}$
 (ج) $\vec{H} = \vec{0}$ ، $\vec{H} \neq \vec{0}$
 (د) $\vec{H} \neq \vec{0}$ ، $\vec{H} \neq \vec{0}$
- ③ يقع جسم تحت تأثير القوى . $\vec{P}_1 = 2\text{ ص} - 1\text{ ح}$ ، $\vec{P}_2 = 5\text{ ص} + 2\text{ ح}$ ، $\vec{P}_3 = 7\text{ ص} - 3\text{ ح}$ ، فإذا كان الجسم متزنًا فإن : (أ ، ب) =
 (أ) (٧ ، ٣) (ب) (٧ ، ٢-) (ج) (٧- ، ٣) (د) (٧- ، ٣-)

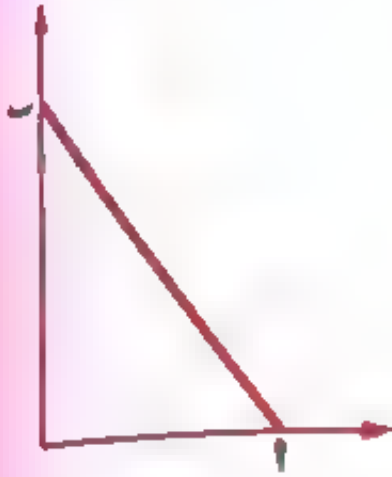
٤ رد فعل المفصل

- (أ) لا يوجد رد فعل له على الإطلاق.
 (ب) يعمل فى الاتجاه الأفقى فقط.
 (ج) يعمل فى الاتجاه الرأسى فقط.
 (د) غير معلوم الاتجاه.
- ٥ إذا استند قضيب بأحد نقطه على وتد أملس تولد رد فعل عند نقطة الاسناد يكون اتجاهه
 (أ) عمودياً على القضيب ويمر بنقطة تلامسه مع الوتد.
 (ب) موازياً للقضيب.
 (ج) غير معلوم الاتجاه.
 (د) عمودياً على القضيب ولا يمر بنقطة تلامسه مع الوتد.

٦ إذا اتصل قضيب بأحد طرفيه بمفصل مثبت في حائط رأسى وكانت : $\vec{S} = 3\text{ نيوتن}$ ، $\vec{V} = 4\text{ نيوتن}$ هما المركبتين الجبريتين لقوة رد فعل المفصل وكانت : $\vec{S} = 2\text{ نيوتن}$ ، $\vec{V} = 4\text{ نيوتن}$ فإن قوة رد فعل المفصل بالنيوتن تساوى

- (أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٧ (د) ١٢

٧ في الشكل المقابل :



أ قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على

حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية

فى أى من الحالات الآتية يتزن القضيب

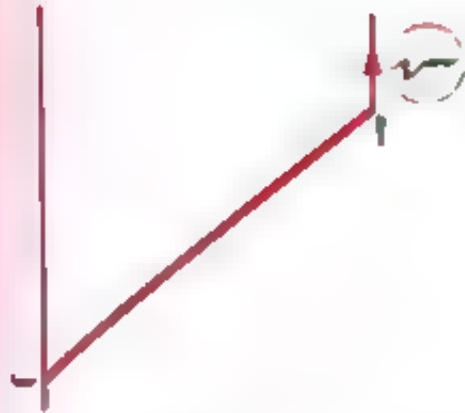
(أ) كل من الحائط والأرض ملساوان.

(ب) الأرض ملساء والحائط خشن.

(ج) الأرض خشنة والحائط أملس.

(د) القضيب يتزن فى كل الحالات السابقة.

٨ في الشكل المقابل :



أ قضيب معلق من طرفه (٢) بواسطة خيط رأسى

ومتصل طرفه (ب) فى مفصل مثبت فى حائط رأسى

فإن رد فعل المفصل يكون

(أ) عمودى على الحائط.

(ب) رأسياً لأسفل.

(ج) رأسياً لأعلى.

(د) فى اتجاه أ

٩ أ سلم منتظم وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه أ على أرض أفقية ملساء وبطرفه ب على حائط رأسى أملس. حفظ السلم فى مستو رأسى وفى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها 45° بواسطة حبل أفقى يصل الطرف أ بنقطة على الأرض تقع رأسياً أسفل ب تماماً. أوجد :

١ مقدار الشد فى الحبل.

٢ مقدار قوة رد فعل كل من الحائط عند ب ، الأرض عند أ .

٢٠٠ ، ٣٠ ، ٦٠ نيوتن

الدرس الاول

٢- سلم طوله ٥ أمتار ووزنه ١٧.٥ ثقل كجم يرتكز بطرفه ١ على حائط رأسي أملس وبطرفه ٢ على أرض أفقية ملساء. حفظ السلم في حالة توازن وذلك بربط طرفه ٢ بخيط أفقي وواقع في المستوى الرأسي للسلم. أوجد الشد في الخيط إذا كان بُعد ٢ عن الحائط ٣ أمتار وكان وزن السلم يؤثر في نقطة على بُعد ٢ متر من ٢ وكذلك أوجد مقدار قوة رد فعل كل من الأرض والحائط.

١٧.٥ ، ٥ ، ١٧.٥ ، ٥ ثقل كجم.

٤- سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم وطوله ٣ متر يرتكز بطرفه ١ على أرض أفقية ملساء ويستند بطرفه ٢ على حائط رأسي أملس حفظ توازنه بربط طرفه ١ بحبل مربوط طرفه الآخر بنقطة على خط تقاطع الأرض مع الحائط تقع رأسيًا أسفل ٢ فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° ، صعد عليه رجل وزنه ٦٠ ث.كجم فأوجد مقدار الشد في الحبل عندما يصل الرجل إلى نقطة تبعد مترين عن ١

٤٥ ث.كجم.

٥- يرتكز سلم منتظم وزنه ١٠ ث.كجم بطرفه ١ على مستوى أملس وبطرفه ٢ على حائط رأسي أملس. حفظ السلم في مستوى رأسي في وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها 45° بواسطة حبل أفقي يصل الطرف ١ بنقطة من المستوى الأفقى رأسيًا أسفل ٢ يصعد رجل وزنه ٨٠ ث.كجم هذا السلم. أوجد :

- ١) قوة الشد في الحبل عندما يكون الرجل قد قطع $\frac{2}{3}$ طول السلم.
 - ٢) أقصى قيمة للشد التي يتحملها الحبل علمًا بأنه يكون على وشك الانقطاع عندما يصل الرجل إلى قمة السلم.
- ٦٥ ث.كجم ، ٨٥ ث.كجم.

٦- سلم مقدار وزنه ٢٠ ث.كجم يرتكز بطرفه ١ على مستوى أفقى أملس وبطرفه ٢ على حائط رأسي أملس. حفظ السلم على مستوى رأسي في وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها 45° بواسطة حبل أفقي يصل الطرف ١ بنقطة من المستوى تقع رأسيًا أسفل ٢ ولا يتحمل شد أكبر من ٥٠ ث.كجم. صعد رجل مقدار وزنه ٦٠ ث.كجم على السلم فلما قطع $\frac{2}{3}$ طوله وجد أن الحبل على وشك الانقطاع. عيّن نقطة على السلم التي يؤثر عندها وزنه.

١.٢ = ١.٢ ل حيث ١ نقطة تأثير الوزن.

٧- سلم منتظم وزنه ٤٠ ث.كجم وطوله ١٢ متر يرتكز بطرفه ١ على مستوى أفقى أملس وبطرفه ٢ على حائط رأسي أملس. حفظ السلم في حالة توازن بواسطة حبل مربوط أحد طرفيه في ١ ومربوط طرفه الآخر بنقطة في المستوى الأفقى رأسيًا أسفل ٢ فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° وكان الحبل لا يتحمل شدًا أكثر من ٥٠ ثقل كجم فأنبت أن رجلاً وزنه = وزن السلم لا يستطيع أن يصعد أكثر من ٩ متر بون أن ينقطع الحبل.

٨ ب سلم طوله ٣ أمتار ومقدار وزنه ٣٥ ث. كجم يرتكز بطرفه أ على حائط رأسي أملس وبطرفه ب على مستوي أفقي أملس. حفظ السلم في حالة توازن في مستوي رأسي بواسطة حبل يصل الطرف ب بنقطة في المستوى الأفقي تقع رأسيًا أسفل أ أوجد مقدار الشد في الحبل إذا علم أن بُعد الطرف ب عن الحائط ١,٨ متر وأن قوة وزن السلم تعمل في نقطة منه تبعد ١,٢ متر عن ب ماذا يكون الشد في الحبل إذا وقف رجل مقدار وزنه ٨٠ ث. كجم على السلم عند منتصفه.

٩ سلم منتظم طوله ٥ أمتار ووزنه ٢٠ ث. كجم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسي أملس وبالطرف الآخر على أرض أفقية ملساء ونقطة ارتكاز السلم على الأرض تبعد عن الحائط بمسافة ٣ أمتار والسلم ممنوع من الانزلاق بواسطة حبل مشدود من إحدى نقط السلم إلى نقطة تقابل الحائط مع الأرض واتجاه الحبل عمودي على اتجاه السلم. أوجد مقدار الشد في الحبل ورد الفعل لكل من الحائط والأرض.

١٥ أ ساق منتظمة وزنها ٧ ث. كجم وطولها ٦ ديسم يتصل أحد طرفيها بمفصل مثبت عند طرفها ب والمفصل مثبت في حائط رأسي. علق ثقل قدره ٢ ث. كجم من نقطة على الساق على بُعد $\frac{1}{4}$ ديسم عن طرفها ب ثم حفظت الساق في وضع أفقي بواسطة ربطها من أ بسلك رفيع خفيف أ ح مثبت طرفه ح بنقطة على الحائط تقع رأسيًا فوق ب تمامًا وعلى بُعد ٨ ديسم منها. أوجد: (١) مقدار الشد في السلك.

(٢) مقدار قوة رد فعل المفصل واتجاهه.

١٦ قضيب منتظم مقدار وزنه ٢ ث. كجم وطوله ١٠٠ سم يتصل أحد طرفيه بمفصل مثبت في حائط رأسي علق ثقل قدره ٢ ث. كجم من نقطة على القضيب تبعد ٧٥ سم عن المفصل وحفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة حبل رفيع يتصل بطرفه الآخر وبنقطة على الحائط تقع رأسيًا أعلى المفصل. إذا كان الحبل يميل على الأفقي بزاوية قياسها ٦٠° أوجد مقدار الشد وكذلك رد فعل المفصل.

١٧ أ ح قضيب منتظم طوله ٤٠ سم وزنه ٣٠ ث. كجم يدور حول مفصل عند طرفه أ ومربوط من نقطة ب بأحد طرفي سلك خفيف طرفه الآخر في نقطة على بُعد ٤٠ سم رأسيًا أعلى نقطة أ بحيث كان القضيب أفقيًا. فإذا كان : ب ح = ١٠ سم ، فأوجد مقدار الشد في الخيط ورد فعل المفصل.

٢٥٠ ، ١٣٧٥ ث. كجم ، ١٢٢٤١

الدرس الأول

١٣ **قضيبي منتظم** \overline{AB} طوله ٢٠٠ سم ومقدار وزنه ١٠ نيوتن يتصل طرفه \overline{A} بمفصل مثبت في حائط رأسي ويحمل عند طرفه \overline{B} ثقلاً يساوي وزنه حفظ القضيب في وضع أفقي بواسطة حبل يتصل أحد طرفيه بنقطة على القضيب تبعد ١٥٠ سم عن \overline{A} والطرف الآخر بنقطة على الحائط رأسيًا أعلى \overline{A} ، فإذا كان الحبل يميل على الأفقي بزاوية قياسها 30° عيّن مقدار الشد فيه وكذلك مقدار قوة رد فعل المفصل.

٤٠٠ ، ٢٠ ، $\sqrt{3}$ نيوتن.

١٤ **قضيبي منتظم** وزنه ٤٠ نيوتن يتصل بطرفه \overline{A} بمفصل مثبت في حائط رأسي ويحمل عند طرفه \overline{B} ثقلاً قدره ٢٠ نيوتن. حفظ القضيب في وضع يميل فيه على الأفقي لأعلى بزاوية قياسها 30° بواسطة حبل مساوٍ للقضيب في الطول ويتصل أحد طرفيه بالطرف \overline{B} للقضيب ويتصل طرفه الآخر بنقطة \overline{C} من الحائط تقع رأسيًا أعلى \overline{A} وعلى بُعد منها يساوي طول القضيب. أوجد :

① مقدار الشد في الحبل.

② مقدار قوة رد فعل المفصل عند \overline{A} واتجاهه. ٤٠٠ ، ٢٠ ، $\sqrt{3}$ نيوتن ، $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

١٥ **قضيبي منتظم** طوله ١٦٠ سم ووزنه ٢٠٠ ثقل جم عُلق في مسمار ثابت \overline{C} بواسطة خيطين مربوطين في طرفيه \overline{A} ، \overline{B} وعُلق في إحدى نقطته \overline{D} ثقل مقداره ٦٠٠ ثقل جم. فإذا كان القضيب يتزن في وضع أفقي والخيطان \overline{AC} ، \overline{BC} يميلان على القضيب بزاويتين قياسهما 60° ، 30° على الترتيب فأوجد طول \overline{AD} ومقدار الشد في الخيطين.

٢٠٠ سم ، ٤٥٠ ، ٤٥٠ ، $\sqrt{3}$ ث.جم.

١٦ **قضيبي منتظم** كتلته ١٦ كجم وطوله ٤.٢ متر ، \overline{C} ، \overline{D} نقطتان عليه بحيث : $\overline{AC} = ١.٢$ متر ، $\overline{BC} = ٠.٦$ متر. عُلق القضيب من \overline{C} ، \overline{D} بواسطة خيطين \overline{CD} ، \overline{DE} وأثرت قوة مقدارها $\frac{1}{4}$ وزن كجم في القضيب في الاتجاه \overline{AB} فجعلت الخيط \overline{DE} رأسيًا والخيط \overline{CD} مائلًا واتزن القضيب في وضع أفقي. أوجد مقدار الشد في كلٍ من الخيطين وميل الخيط \overline{CD} على الأفقي.

$\frac{1}{4}$ ، ١٢ ، ٦ ث.كجم ، زاوية ظلها $\frac{1}{4}$ مع الأفقي.

١٧ **سلم منتظم** وزنه ٦٠ نيوتن يرتكز بطرفه \overline{A} على حائط رأسي أملس وبطرفه \overline{B} على أرض أفقية خشنة فإذا كان السلم على وشك الحركة عندما كان يميل على الأفقي بزاوية قياسها 60° فأوجد مقدار رد فعل الحائط ومقدار قوة الاحتكاك عند \overline{B} . ١٠ ، $\sqrt{3}$ ، ١٠ ، $\sqrt{3}$ نيوتن.

٢٨ سلم منتظم طوله ٦ أمتار ووزنه ١٠ ثقل كجم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس ويرتكز بالطرف الآخر على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين السلم يساوى $\frac{1}{4}$ أثبت أن السلم فى حالة التوازن النهائى يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥° .

٢٩ قضيب منتظم يرتكز فى مستوٍ رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على مستوٍ أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$ أوجد ظل الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. ٢٠° .

٣٠ قضيب منتظم يرتكز فى مستوٍ رأسى بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس ، وبطرفه السفلى على مستوٍ خشن أفقى ، بحيث يصنع القضيب مع الأفقى زاوية ظلها $\frac{3}{4}$ أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. $\frac{1}{4}$.

٣١ قضيب منتظم مقدار وزنه ١٥ نيوتن يرتكز بطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة وبطرفه العلوى على حائط رأسى أملس. اتزن القضيب فى مستوٍ رأسى وكان على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والأرض وكذلك مقدار رد فعل الحائط عليه. $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ نيوتن.

٣٢ أ ب سلم منتظم وزنه ١٠٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه ب على حائط رأسى أملس ويرتكز بطرفه أ على أرض أفقية خشنة وكان السلم يميل على الأرض بزاوية قياسها ٦٠° ، فإذا استطاع رجل وزنه ١٥٠ ثقل كجم الصعود حتى قمة السلم وأصبح السلم عند ذلك على وشك الانزلاق فأوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الطرف أ للسلم ومستوٍ الأرض الأفقى. $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{4}$.

٣٣ (دور أول ٢٠١٧) سلم منتظم مقدار وزنه ٢٠ ث. كجم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبالطرف الآخر على حائط رأسى أملس. اتزن السلم فى مستوٍ رأسى وكان قياس زاوية ميله على الأفقى ٦٠° إذا علم أن معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض يساوى $\frac{1}{4}$ أثبت أن أقصى مسافة تستطيع فتاة وزنها ٦٠ ث. كجم أن تصعدوها على السلم تساوى نصف طول السلم.

(دورتاك ١٩٩٩) سلم منتظم وزنه ٢٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى على أرض أفقية خشنة فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والسلم يساوى $\frac{3}{4}$ فإذا أثرت على الطرف السفلى للسلم قوة مقدارها ١٠ ثقل كجم وتصنع زاوية قياسها 30° مع الأفقى بحيث تعمل على تحريك هذا الطرف بعيداً عن الحائط وكان السلم على وشك الانزلاق فأوجد ظل الزاوية التى يصنعها السلم مع الأفقى.
(السلم فى وضع التوازن فى مستوى رأسى عمودى على الحائط).
 $\frac{3}{4}$

٢٥ سلم قضيبي منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه (و) يستند بطرفه ١ على حائط رأسى أملس وبطرفه ٢ على أرض أفقية معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$ اتزن القضيب فى مستوي رأسى بحيث كان الطرف ٢ على بُعد ١٠٠ سم من الحائط. أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت عند الطرف ٢ جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط.
 $\frac{17}{24}$ و

٢٦ سلم ساق منتظمة وزنها ٢٠ نيوتن ترتكز بطرفها ١ على أرض أفقية خشنة وتستند بطرفها ٢ على حائط رأسى أملس بحيث تكون الساق فى مستوي رأسى عمودى على الحائط وتميل على الأرض الأفقية بزاوية قياسها 45° أوجد مقدار القوة الأفقية التى تؤثر عند الطرف ١ للساق لكى تجعلها على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط علماً بأن معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض $\frac{2}{3}$
« ٥ نيوتن »

٢٧ سلم قضيبي منتظم وزنه و بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس وبطرفه الثانى على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستوي رأسى ويميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° إذا كان القضيب متزنًا ، أثبت أن معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والأرض لا يمكن أن يكون أقل من $\frac{1}{4}$ وإذا كان معامل الاحتكاك السكونى يساوى $\frac{2}{3}$ فعين القوة الأفقية التى تؤثر عند طرف القضيب الملامس للأرض وتجعله على وشك الحركة :
① نحو الحائط. ② بعيداً عن الحائط. $\frac{5}{4}$ و ، $\frac{1}{4}$ و

٢٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا ارتكز قضيب بطرفه على مستوى خشن كان اتجاه رد الفعل

- (أ) عمودياً على المستوى. (ب) موازياً لذلك المستوى.
(ج) غير معلوم الاتجاه. (د) يصنع زاوية قياسها 45° مع ذلك المستوى.

٢) يستند سلم منتظم بطرفه العلوى على حائط أملس رأسى وبطرفه السفلى على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{1}{4}$ فكان على وشك الانزلاق فإن زاوية ميل السلم على الرأسى =

- (أ) $\frac{\pi}{6}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) $\frac{\pi}{3}$ (د) $\frac{\pi}{2}$

٣) سلم منتظم يستند بطرفه السفلى على مستوى أفقى خشن وبطرفه العلوى على حائط رأسى أملس وكانت الزاوية بين السلم والمستوى الرأسى هى (هـ) وكان السلم فى وضع الاتزان النهائى وكان معامل الاحتكاك السكونى (مـ) فإن : ط هـ =

- (أ) مـ (ب) 2 مـ (ج) $\frac{2\text{ مـ}}{3}$ (د) $1 + \text{مـ}$

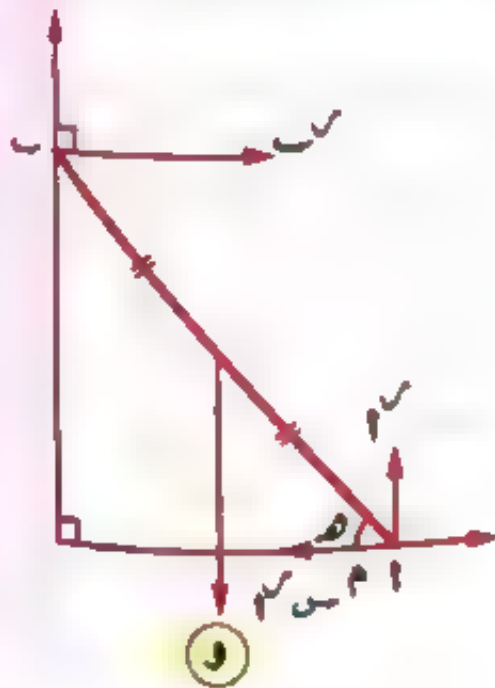
٤) أ ب قضيب منتظم وزنه (و) يستند بطرفه العلوى أ على حائط رأسى أملس وبطرفه السفلى ب على مستوى أفقى خشن وكان على وشك الحركة فإن رد فعل الحائط على الطرف أ يساوى

- (أ) مـ و (ب) و
(ج) $\frac{و}{\text{مـ}}$ (د) رد الفعل العمودى عند ب

٥) فى الشكل المقابل :

إذا كانت ل هى زاوية الاحتكاك بين الأرض والقضيب
فإن : ط هـ . ط ل =

- (أ) ٢ (ب) ١
(ج) ٢ (د) $\frac{1}{4}$

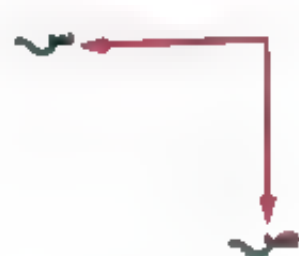
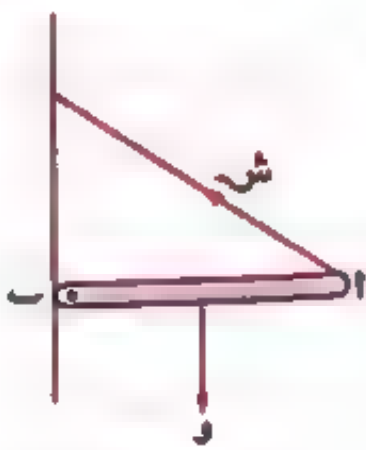


⑥ الشكل المقابل يمثل قضيب

منتظم متزن فإن اتجاهات

مركبات رد فعل المفصل

عند ب تكون



(أ)



(ب)



(ج)



(د)

⑦ قضيب خفيف طوله L يرتكز في وضع أفقي على وتد كما بالشكل فإذا كانت الكتلة m_1 تتزن مع الكتلتين m_2 أو m_3 منفردتين كما هو بالشكل فإن قيمة L بدلالة m_1 ، m_2 ، m_3 تساوى



(أ) $L = \frac{m_1}{m_2}$



(ب) $L = \frac{m_1}{m_3}$

(ج) $L = \frac{m_1}{m_2 + m_3}$

(د) $L = \frac{m_1}{m_2 + m_3}$

⑧ سلم منتظم وزنه ١٠٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه ١ على أرض أفقية خشنة معامل

الاحتكاك السكونى بينها وبين السلم يساوى $\frac{3}{4}$ ، يرتكز بطرفه ٢ على حائط رأسى أملس فإذا كان السلم يميل على الأفقى بزاوية قياسها 60° فأوجد مقدار أكبر ثقل يمكن تعليقه عند ب دون أن يختل التوازن للسلم ثم أوجد كذلك مقدار رد فعل الحائط عند ب فى هذه الحالة. 1000 ، 2000 ثقل كجم.

⑨ (دورثان ١٩٩٨) يرتكز سلم منتظم وزنه ٤٠ ث كجم بأحد طرفيه على حائط رأسى أملس

وبطرفه الآخر على أرض أفقية خشنة بحيث يقع فى مستو رأسى عمودى على الحائط ويميل على الأفقى بزاوية قياسها 45° ، صعد ولد وزنه يساوى وزن السلم فأصبح السلم على وشك الانزلاق عندما يقطع الولد مسافة تساوى $\frac{3}{4}$ طول السلم. أوجد معامل الاحتكاك السكونى بين الأرض والسلم. وإذا أراد الولد أن يتم صعود السلم فأوجد أقل قوة أفقية تؤثر على الطرف السفلى للسلم حتى يتمكن الولد من ذلك.

100 ، $\frac{5}{8}$ ثقل كجم.

٣١ **أ** سلم منتظم طوله ٥ متر ووزنه ٢٠ ث. كجم استند السلم بطرفه ١ على حائط رأسى أملس وبطرفه ٢ على أرض أفقية خشنة معامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{1}{4}$ وكان الطرف ٢ على بُعد ٢ متر من الحائط. أثبت أن السلم لا يمكن أن يتزن فى هذه الحالة ثم أوجد أصغر وزن لجسم معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين الأرض $\frac{1}{6}$ بحيث إذا وضع عند الطرف ٢ للسلم يمنعه من الانزلاق. $\frac{1}{4}$ ١٢ ث. كجم.

٣٢ قضيب منتظم يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$ وبطرفه السفلى على مستوى أفقى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{2}{3}$ أوجد زاوية ميل القضيب على الأفقى عندما يكون على وشك الانزلاق. ٢٢٢٧°

٣٣ سلم منتظم يرتكز بطرفه ١ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ٢ على حائط رأسى خشن فإذا كان معاملا الاحتكاك السكونى عند ١ ، ٢ يساويان $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ على الترتيب فأوجد ظل زاوية ميل السلم على الرأسى عندما يكون السلم على وشك الانزلاق. $\frac{8}{11}$

٣٤ قضيب منتظم مقدار وزنه ٤٠ نيوتن يرتكز بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$ وبطرفه الآخر على أرض أفقية معامل الاحتكاك السكونى بينها وبين القضيب يساوى $\frac{1}{4}$ فإذا كان القضيب يتزن فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار القوة الأفقية التى تجعل الطرف السفلى للقضيب على وشك الحركة نحو الحائط. ٦٠٠ نيوتن.

٣٥ **أ** قضيب منتظم طوله ٢٦٠ سم ومقدار وزنه ٤٢ نيوتن يرتكز بطرفه ١ على حائط رأسى وبطرفه ٢ على أرض أفقية وكان معاملا الاحتكاك السكونى بين القضيب وكل من الحائط والأرض يساويان $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$ على الترتيب ، وكان الطرف ٢ يبعد ١٠٠ سم عن الحائط. أوجد مقدار القوة الأفقية التى إذا أثرت فى الطرف ٢ جعلت القضيب على وشك الحركة نحو الحائط. $٢٢,٧٥٠$ نيوتن.

٣٦ **أ** سلم منتظم وزنه ٩ ث. كجم يستند بطرفه ١ على أرض أفقية خشنة وبطرفه ٢ على حائط رأسى خشن فإذا كان معاملا الاحتكاك السكونى عند ١ ، ٢ هما $\frac{5}{9}$ ، $\frac{1}{4}$ على الترتيب ثم شد الطرف ١ للسلم بقوة أفقية جعلت السلم على وشك الانزلاق بعيداً عن الحائط وكان السلم يصنع مع الأفقى زاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار القوة $٢,٢٥٠$ نيوتن.

الدرس الاول

يستند سلم منتظم بأحد طرفيه على حائط رأسى معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين السلم يساوى $\frac{1}{4}$ وبطرفه الآخر على أرض أفقية من نفس خشونة الحائط. فإذا اتزن السلم فى مستوى رأسى فى وضع يميل فيه السلم على الحائط بزاوية ظلها $\frac{7}{11}$ برهن على أن رجلاً وزنه يساوى ثلاثة أمثال وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{7}{9}$ طول السلم دون أن ينزلق السلم.

المسألة (١٩٩٤) يرتكز قضيب غير منتظم \overline{AB} طوله ١٤٠ سم بطرفه B على أرض أفقية وبطرفه A على حائط رأسى. إذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب وكل من الأرض والحائط يساويان $\frac{1}{4}$ ، على الترتيب وكان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى 45° فأوجد بُعد نقطة تأثير وزن القضيب عن الطرف B (القضيب يقع فى مستوى رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض). ٨٠٠ سم.

المسألة ٢٩ \overline{AB} ساق منتظمة ترتكز بطرفها السفلى A على أرض أفقية وترتكز بطرفها العلوى B على حائط رأسى وكان معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والحائط يساوى ٣ أمثال معامل الاحتكاك السكونى بين الساق والأرض فإذا كانت الساق على وشك الانزلاق وعندما كانت تصنع مع الحائط زاوية ظلها $\frac{4}{3}$ فاثبت أن رد فعل الحائط يساوى $\frac{5}{9}$ من وزن الساق.

المسألة ٣٠ \overline{AB} سلم منتظم وزنه ٢١ ثقل كجم يرتكز بطرفه A على أرض أفقية خشنة وبطرفه B على حائط رأسى خشن، فإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين السلم والأرض $\frac{2}{5}$ وبين السلم والحائط $\frac{1}{4}$ وكان السلم يميل على الرأسى بزاوية ظلها $\frac{3}{5}$ أثبت أن طفاً وزنه يساوى وزن السلم لا يمكنه الصعود أكثر من $\frac{2}{3}$ طول السلم دون أن يختل التوازن ثم أوجد أصغر ثقل يجب وضعه فوق قاعدة السلم حتى يتمكن الطفل من أن يصل إلى قمة السلم. ١٢٠ ثقل كجم.

المسألة ٣١ \overline{AB} قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٦ ث. كجم يرتكز بطرفه A على مستوى أفقى خشن ويرتكز عند إحدى نقطة C على وتد أفقى أملس يعلو ٢٠ سم عن المستوى الأفقى فإذا كان القضيب يميل على الأفقى بزاوية 30° أوجد قوة الاحتكاك. وإذا كان معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى $\frac{3}{4}$ فأوجد الثقل الذى يمكن تعليقه عند الطرف B ليجعل القضيب على وشك الانزلاق. $\frac{8}{3}$ ث. كجم، $\frac{2}{3}$ ث. كجم.

نط رأسى
لطرف B
صغر وزن
 B للسلم
١ ث. كجم.

ينه وبين
بينه
وشك
٢٧، ٢٢.

من فإذا
ظل

$\frac{8}{11}$

احتكاك
احتكاك

فى
ل

٦ نيوتن

حائط

كل من

م عن

وشك

٣ نيوتن

B

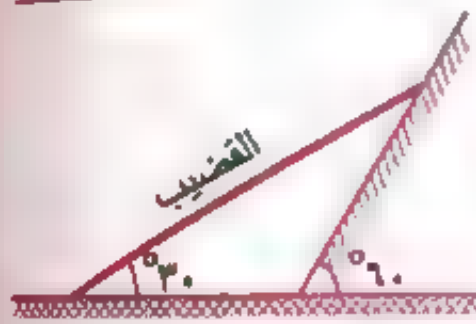
$\frac{1}{4}$ على

ن

٣ نيوتن

٤٢ **أ** قضيب منتظم طوله $2\frac{1}{3}$ مترًا ووزنه ٢٠ ثقل كجم يرتكز بطرفه **أ** على مستوى أفقي خشن ويستند بإحدى نقطه **ح** على مسمار أملس مثبت على ارتفاع ١,٢ مترًا من المستوى الأفقي وعندما كان ظل زاوية ميل القضيب على الأفقي $\frac{3}{4}$ أصبح القضيب على وشك الانزلاق. أوجد كلاً من رد فعل المسمار على القضيب وكذلك معامل الاحتكاك السكوني بين القضيب والمستوى الأفقي.

٤٣ **أ** سلم منتظم طوله ٨ أمتار ووزنه ٢٠ ثقل كجم يستند بطرفه **أ** على أرض أفقية خشنة ويميل على الأفقي بزاوية ظلها $\frac{4}{3}$ ويستند بإحدى نقطة **ح** على حافة سور أملس يعلو عن الأرض بمقدار ٤ أمتار فإذا كان معامل الاحتكاك السكوني بين السلم والأرض μ فبين أنه في وضع التوازن النهائي تكون $\mu \leq \frac{48}{89}$ وإذا كانت $\mu = \frac{2}{4}$ فأوجد مقدار الثقل الذي يجب تعليقه عند **ب** حتى يكون السلم على وشك الانزلاق.



٤٤ **١٩٩٣** في الشكل الموضح :

يرتكز قضيب منتظم وزنه ٢٤ ثقل كجم بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة وبطرفه الآخر على مستوى أملس يميل على الأفقي

بزاوية قياسها 60° إذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقي 30° فأوجد معامل الاحتكاك السكوني بين القضيب والأرض ورد فعل كل من المستوى والأرض.

٤٥ قضيب منتظم **أ** وزنه (و) ثقل كجم يرتكز بطرفه **أ** على مستوى أفقي أملس وبطرفه **ب** على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية قياسها 60° فإذا منع القضيب من الانزلاق بحبل أفقي **أ** مثبت أحد طرفيه في الطرف **أ** للقضيب والطرف الآخر للحبل مثبت في **ح** حيث **ح** تقع على خط تقاطع المستويين وبحيث يكون القضيب والخيط في مستوى رأسي عمودي على خط تقاطع المستويين. أوجد بدلالة (و) رد فعل كل من المستويين وكذلك الشد في الخيط علماً بأن القضيب في وضع الاتزان يميل على الأفقي بزاوية قياسها 30° .

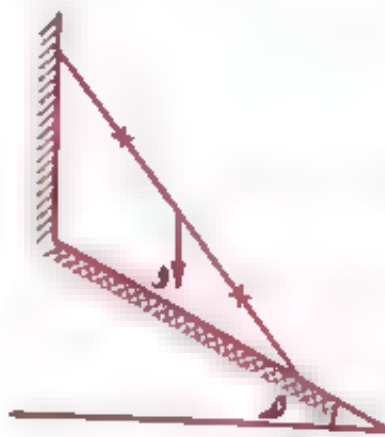
الدرس الاول

قضيب معننى طوله ٦٠ سم ووزنه ٦٠٠ ثجم يرتكز بطرفه ٩ على مستو أفقى خشن ومعامل الاحتكاك السكونى بينهما $\frac{3}{4}$ ويرتكز بطرفه الآخر على مستو أملس يميل على المستوى الأول بزاوية قياسها ١٢٠° بحيث يكون القضيب عمودياً على خط تقاطع المستويين ويقابل الزاوية المنفرجة بينهما فإذا كان القضيب على وشك الحركة عندما كان قياس زاوية ميله على الأفقى ٣٠° فأوجد رد فعل كل من المستويين وكذلك مركز ثقل القضيب.

٤٠٠٠ ، ٢٠٠ ، ٧٢٠ ث.جم ، ٤٠ سم من ٩.

قضيب منتظم وزنه (٩) يرتكز بطرفيه على أرض أفقية خشنة وعلى مستو مائل خشن يميل على الأفقى بزاوية ظل قياسها $\frac{4}{3}$ فإذا علم أن القضيب فى وضع التوازن النهائى يقع فى المستوى الرأسى العمودى على خط تقاطع المستويين وأن معامل الاحتكاك السكونى بين القضيب والمستوى الأفقى $\frac{1}{3}$ وبين القضيب والمستوى المائل $\frac{1}{4}$ أثبت أن القضيب يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٤٥°

٤٨ فى الشكل المقابل :



ترتكز إحدى نهايتى سلم منتظم وزنه (٩) على حائط رأسى أملس وترتكز النهاية الأخرى على أرض خشنة تميل على الأفقى بزاوية قياسها ٥٠° فإذا كان السلم على وشك الانزلاق وهو فى مستو رأسى عمودى على خط تقاطع الحائط مع الأرض فاثبت أن السلم يميل على الرأسى بزاوية ظلها يساوى $\frac{1}{2}$ (أ - ب) حيث ي قياس زاوية الاحتكاك.

٤٩ أ - قضيب رفيع خفيف طوله ٢ ل معلق فى مستو رأسى من طرفيه ٩ ، ب بخطين يميلان على الرأس بزاويتين ٣٠° ، ٦٠° على الترتيب. علق فى القضيب الثقلان ٢ ، ٨ نيوتن على بُعد من ٩ يساوى $\frac{1}{3}$ ل ، $\frac{2}{3}$ ل أوجد فى وضع التوازن مقدار الشد فى الخيطين وقياس زاوية ميل القضيب على الأفقى.

٥٠ ، ٥٠ ، ٣٢٠ نيوتن ، ٣٠° ، ٦٠°

في الشكل المقابل :

تجوييف نصف كروي أملس يرتكز بقاعدته الدائرية على أرض أفقية خشنة وضع قضيب منتظم طوله (٤ ل) ووزنه (و) بحيث تلامس إحدى نقطه السطح الخارجى للوعاء فى (ب) ويرتكز بطرفه الخالص (٢) على الأرض فإذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان $\alpha = 30^\circ$

١٠ (د م ٩) = ٦٠ أوجد معامل الاحتكاك السكوني وقيمة كلي من : μ_1 ، μ_2 ، $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، و٠

📖 قضيب منتظم وزنه (و) يتصل أحد طرفيه بمفصل ويتصل طرفه الآخر بخيط مربوط في نقطة في نفس المستوى الأفقى المار بالمفصل بحيث كان قياس زاوية ميل كل من القضيب والخيط على الأفقى مساوٍ له أثبت أن رد فعل المفصل يساوى $\frac{1}{2}W$ و $8\sqrt{2}$ قنا هـ

١- ساق منتظم ترتكز بطرفها ٢ على حائط رأسى أملس وبطرفها ٣ على مستوٍ أملس يميل على الأفقى إلى أعلى بزاوية قياسها ٣٠° فإذا كانت الساق فى وضع التوازن تميل على الحائط بزاوية قياسها ٢٢° فاثبت أن $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ وأوجد ردى فعل كل من المستويين على الساق.

يُتَظَنُّ أَنَّ السَّلْمَ مُنْتَظَمٌ فِي مَسْتَوِيٍّ رَأْسِيٍّ عَلَى حَائِطٍ رَأْسِيٍّ وَأَرْضٍ أَفْقِيَّةٍ ، إِذَا كَانَ قِيَاسُ زَاوِيَةِ الْإِصْطِكَاعِ السَّكُونِيِّ بَيْنَ السَّلْمِ وَكُلِّ مِنَ الْحَائِطِ وَالْأَرْضِ هِيَ لَمْ تَقَابَلْ أَنَّ قِيَاسَ زَاوِيَةِ مِيلِ السَّلْمِ عَلَى الرَّأْسِيِّ عِنْدَمَا يَكُونُ عَلَى وَشِكِ الْإِنْزِلَاقِ $\theta = 2^\circ$ لَمْ

١- قضيب منتظم طوله l ووزنه W ويرتكز بطرفه A على مستوٍ أفقي خشن معامل الاحتكاك السكوني بينه وبين القضيب $\frac{1}{3}$ ويرتكز بطرفه B على حائط رأسي أملس وكان القضيب يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ أثرت قوة أفقية H على القضيب عند نقطة C من القضيب حيث : $AC = \frac{1}{4}l$ وكان الطرف A على وشك الحركة نحو الحائط.

الدرس الاول

٥٦ **أ** ساق منتظمة ترتكز بطرفها **أ** على أرض أفقية خشنة قياس زاوية الاحتكاك بينهما **ل** وربط الطرف **ب** بخيط عمودي على الساق فإذا اتزنت الساق في وضع يعيل فيه على الأفقى بزاوية قياسها **هـ** وكان الخيط والساق في مستوي رأسي واحد. فأثبت أن : $\frac{2}{(1 + \cos \alpha)} = \frac{2}{\cos \alpha}$

٥٧ **أ** سلم منتظم وزنه **و** ، وطوله **٢ ل** يرتكز بطرفه **أ** على أرض أفقية خشنة ويستند عند طرفه **ب** على حائط رأسي خشن. فإذا كان السلم على وشك الانزلاق عندما كانت زاوية ميله على الأرض **هـ** فأثبت أن : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ حيث **م** معامل الاحتكاك السكوني بين السلم وكل من الحائط والأرض. علماً بأن المسقط الأفقى للسلم عمودي على الحائط.

٥٧ قضيب منتظم يرتكز بأحد طرفيه على أرض أفقية خشنة ويستند بالطرف الآخر على حائط رأسي خشن فإذا علم أن القضيب على وشك الانزلاق فأثبت أن ظل الزاوية التي يصنعها مع الرأسى $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ حيث **أ** ، **ب** زوايتا احتكاك القضيب مع الأرض والحائط على الترتيب. برهن أن هذا القضيب لا يتزن إذا كانت الأرض ملساء وحتى لو كان الحائط خشناً.

مسائل تقيس مستويات عليا من التمكن

٥٨ **أ** سلم منتظم يرتكز بطرفه **أ** على حائط رأسي أملس وبطرفه **ب** على مستوي أفقى أملس وحفظ السلم من الانزلاق بواسطة حبل ربط أحد طرفيه بقاعدة الحائط رأسيًا أسفل **أ** وربط طرفه الآخر في نقطة من السلم على بُعد من **ب** يساوى $\frac{1}{3}$ طول السلم فإذا كان ضغط السلم على الحائط يساوى **ط** وضغطه على المستوى الأفقى يساوى **و** وكانت **أ** ، **ب** على بُعد **س** ، **ص** من قاعدة الحائط على الترتيب. فأثبت أن : $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ حيث **أ** ، **ب** زوايتا احتكاك القضيب مع الأرض والحائط على الترتيب. برهن أن هذا القضيب لا يتزن إذا كانت الأرض ملساء وحتى لو كان الحائط خشناً.

٥٩ **أ** حذاء صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع وزنها **و** يؤثر عند نقطة تقاطع القطرين ، نُقبت الصفيحة ثقبًا صغيرًا عند **أ** وعُلقت في مستوي رأسي من مسمار يمر بالثقب ومثبت في حائط رأسي ، ثم ربطت الصفيحة من **د** بخيط خفيف مُثبت طرفه الآخر في نقطة من الحائط تقع رأسيًا فوق المسمار وتبعد عنه بقدر طول ضلع المربع وعُلِق ثقل قدره **٢ و** عند الرأس **ح** فإذا كانت الصفيحة في وضع توازن وحرفها **أ** أفقيًا. فتوجد كلاً من الشد في الخيط ومقدار الضغط على المسمار.

٢٩ \overline{AB} قضيب منتظم يزن ٦ ثقل كجم وطوله ٦٠ سم يدور بسهولة حول مفصل عند Γ ويمر داخل حلقة خفيفة ملساء مربوطة في أحد طرفي خيط خفيف طوله ٢٤ سم والطرف الثاني للخيط مثبت في نقطة Δ تقع رأسياً أعلى Γ وعلى بُعد ٣٠ سم منها. أثبت أنه في وضع التوازن يكون الخيط عمودياً على القضيب وأوجد الشد في الخيط ومقدار واتجاه رد فعل المفصل.

٨٠ ، ٤.٨٢ ثقل كجم ، ٤٦° تقريباً.

٣١ كرة معدنية مصممة متجانسة نصف قطرها نق. ربطت من نقطة على سطحها في خيط وثبت الطرف الآخر للخيط في النقطة Γ على حائط رأسي خشن لتركز الكرة في حالة اتزان وهي على وشك الانزلاق إلى أسفل الحائط عند نقطة ب ، فإذا كان $\overline{AB} = \sqrt{3}$ نق وكان معامل الاحتكاك السكوني بين الكرة والحائط $\frac{1}{\sqrt{3}}$. فاثبت أن ظل الزاوية التي يصنعها الخيط مع الحائط يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مع العلم بأن خط عمل وزن الكرة يؤثر في مركزها.

٣٢ قرص دائري منتظم وزنه ٢ ث كجم يؤثر عند مركزه يستند على أرض أفقية خشنة وحائط رأسي خشن ، معامل الاحتكاك السكوني بين القرص والحائط $\frac{1}{4}$ وكان مستوي القرص عمودياً على الأرض والحائط ، أثرت عند أعلى نقطة من القرص قوة أفقية مقدارها ١ ث. كجم موجهة نحو الحائط فوصلت قوة الاحتكاك بين القرص والحائط إلى نهايتها العظمى ، أوجد مقدار قوة الاحتكاك بين القرص والأرض وإذا زاد مقدار القوة الأفقية المؤثرة على القرص إلى ٢ ث كجم فإن قوة الاحتكاك بين القرص والأرض تصل إلى نهايتها العظمى ويصبح القرص على وشك الحركة. احسب معامل الاحتكاك السكوني بين الأرض والقرص.

$\frac{1}{4}$ ث. كجم ، $\frac{1}{4}$.

٣٣ \overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{CA} ثلاثة قضبان منتظمة وزن كل منها $\frac{1}{4}$ ث كجم وطول كل منها ٢٠ سم متصلة عند Γ ، ب ، ح وقابلة للدوران حول مسمار أفقي أملس في ثقب صغير عند Γ وإذا ربطت ب في أحد طرفي خيط يمر على بكرة ملساء ثابتة وفي الطرف الآخر من الخيط معلق ثقل وكانت البكرة تقع رأسياً فوق Γ وعلى بُعد منها ٢٠ سم فاثبتت المجموعة في وضع كان فيه Γ ح رأسياً. أوجد قيمة الثقل ومقدار واتجاه رد فعل المسمار.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ث. كجم ، ٦٠° .

الدرس الاول

وعاء على شكل نصف كرة سطحها الداخلى أملس وطول نصف قطرها ٢٠ سم وضعت بحيث كان سطحها المستوى أفقياً ووضع قضيب ثقيل بأكمله داخل الوعاء وكان وزن القضيب يقسمه إلى جزأين طولاهما ٢٥ سم ، ٢٠ سم أثبت أن القضيب فى وضع الاتزان يميل على الرأسى بزاوية قياسها θ حيث : $\frac{1}{8} = \frac{\theta}{\theta_0}$

باب مستطيل الشكل وزنه (٩) ث. كجم يدور بسهولة فى مستوى رأسى حول مفصلين مثبتين فى خط رأسى واحد والمسافة بينهما متران فإذا كان وزن الباب موزعاً بالتساوى على المفصلين ويعمل على بُعد $\frac{2}{3}$ متر من خط المفصلين أوجد مقدار واتجاه رد فعل كل من المفصلين.

$\theta_0 = 10^\circ$ ، $\theta = 5.2^\circ$ ، $\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1}{8}$

قضيب منتظم \overline{AB} طوله ١٨٠ سم يرتكز بطرفه A على مستوى أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب $= \frac{1}{3}$ ويستند بإحدى نقطه C على وتد أفقى خشن معامل الاحتكاك السكونى بينه وبين القضيب $= \frac{2}{9}$ فإذا كان القضيب على وشك الانزلاق عندما كان يميل على الأفقى بزاوية جيب تمامها $\frac{2}{5}$ فأوجد طول \overline{AC}

١٥٠٠ سم

الازدواجيات

5 الوحدة



يمكنك حل
الامتحانات التفاعلية
على الدروس
من خلال مسح QR code
الخاص بكل امتحان

الازدواج - اتزان جسم تحت تأثير
ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين.

الازدواج المحصل.

الدرس الأول

الدرس الثاني



الازدواج - اتران جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

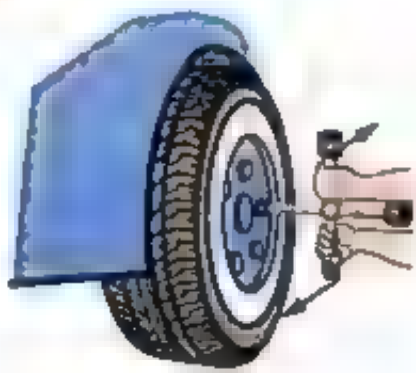
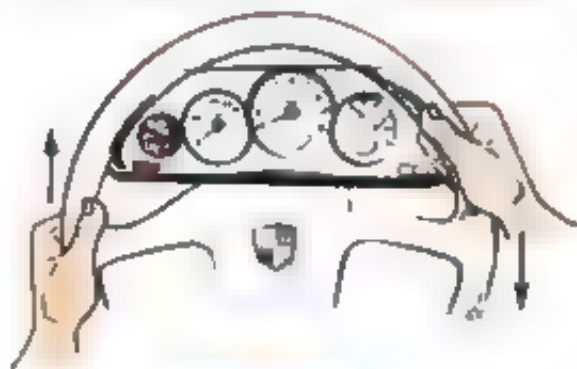
1

تعريف الازدواج

هو مجموعة تتكون من قوتين :

① متساويتين في المعيار. ② متضادتين في الاتجاه.

③ لا يجمعهما خط عمل واحد.



ويعتبر الشرط الأخير في تعريف الازدواج هام للغاية وذلك لأن انطباق خطى العمل يعنى أن الجسم الواقع تحت تأثير القوتين متزن أما إذا لم ينعدم البعد العمودى بين خطى العمل فإن الجسم لا يكون متزنًا وتحدث حركة دورانية فيه وهناك العديد من الأمثلة الحياتية التى نستخدم فيها الازدواجات مثل الازدواج الذى تحدثه اليدين عن إدارة عجلة قيادة السيارة وكذلك الازدواج الذى تحدثه اليدين أيضًا عند محاولة فك أو ربط صواميل إطارات السيارة باستخدام المفتاح المخصص لذلك.

عزم الازدواج

الازدواج إذا أثر على جسم متماسك فإنه يحدث فيه حركة دورانية ، لذلك فإن للازدواج عزمًا يرمز له بالرمز \vec{M} يبين

مقدرته على إحداث هذا الدوران ويكون :

عزم الازدواج مساويًا لمجموع عزمى قوتيّه بالنسبة لأى نقطة فى مستوى القوتين.



أي أن: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times (-\vec{a})$

$$\therefore \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} - (\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{a} = \vec{0}$$

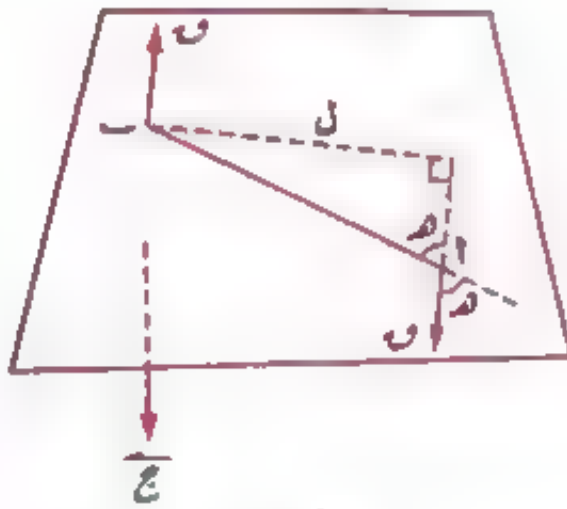
$$\therefore \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a} = \vec{c} \quad \therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$$

ومن ذلك نستنتج النظرية الآتية :

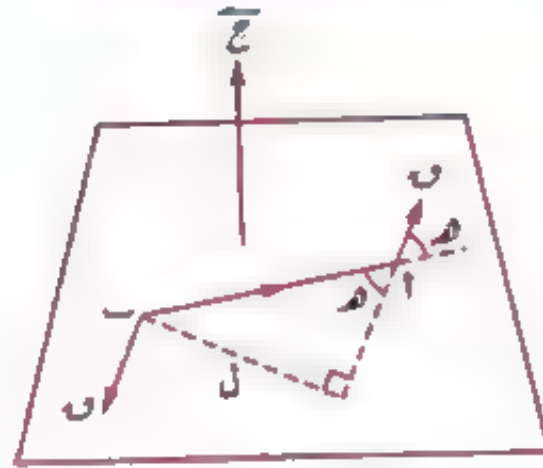
نظرية

عزم الازدواج هو متجه ثابت ، لا يعتمد على النقطة التي تنسب إليها عزمي قوتيها ، وهو يساوي عزم إحدى قوتيها بالنسبة لأي نقطة على خط عمل القوة الأخرى.

مقياس واتجاه عزم الازدواج



شكل (٢)



شكل (١)

$$\therefore \|\vec{c}\| = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

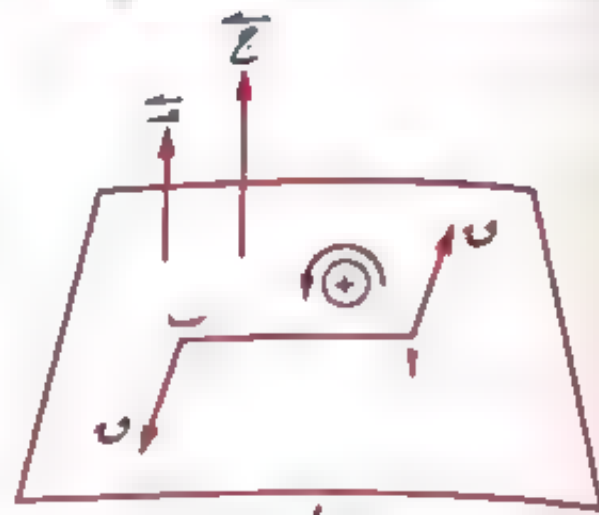
$$\therefore \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin \theta$$

حيث θ قياس الزاوية بين \vec{a} ، \vec{b} ، $\therefore \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin \theta$ ، حيث L البعد العمودي بين خطي عمل \vec{a} ، \vec{b} ويسمى «ذراع الازدواج»

$$\therefore \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin \theta = L \times \|\vec{a}\| \times \|\vec{b}\| \times \sin \theta$$

أي أن : مقياس عزم الازدواج = مقياس إحدى قوتيها \times ذراع الازدواج

• يكون متجه عزم الازدواج عمودياً على المستوى الذي يجمع خطي عمل \vec{a} ، \vec{b} ويتحدد اتجاهه وفقاً لقاعدة اليد اليمنى كما في شكل (١) ، (٢)



(1) میں

فان : $\vec{C} = \vec{M}$ حيث \vec{C} يسمى القياس الجبرى لعزم الازدواج ويكون اتجاه \vec{M} :

ای آن: ج = $u \times 1$ مام = $u \times 1$

ای ان: ج = $q \times 1$ = ماد = $q - x$

أثرت القوتان $\vec{F}_1 = 3\vec{s} + 1\vec{v}$ ، $\vec{F}_2 = 2\vec{s} - 4\vec{v}$ في النقطتين
 حـ (١، ٢) ، د (٠، ١) على الترتيب فإذا كانت القوتان ازدواجاً
 فأوجد قيمتي ١ ، ٢ ومعياري الزدواج وذراع الازدواج.

```

graph LR
    A["(1,1)"] --> B["(1,1)"]
    A --> C["(1,2)"]
    D["(1,2)"] --> E["(1,1)"]
    D --> F["(1,2)"]
  
```

∴ $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ ∴ $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$

$$\therefore s^2 + 1 = (s - 1)(s + 1)$$

$$\therefore \overline{s^2} + \overline{a^2} = \overline{b^2} + \overline{c^2}$$

$$1 = 1, 2 = 2, 3 = 3, 4 = 4, 5 = 5, 6 = 6, 7 = 7, 8 = 8, 9 = 9, 10 = 10$$

$$(1, 1-) = (1, 0) - (0, 1-) = 1 - 1 = 0$$

الوحدة 5

$$\vec{v} = \vec{e} (3 - 4) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0} + \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + \vec{0} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 - \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \|\vec{e}\| = \|\vec{e}\| = 1$$

$$\vec{v} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{v} = \vec{e} \times \vec{e}$$

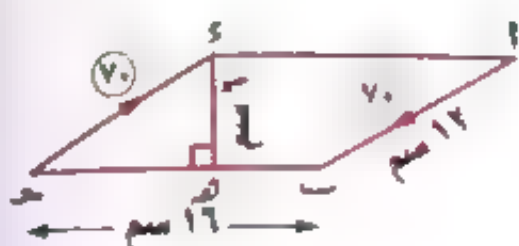
$$\vec{v} = \vec{e} \times \vec{e}$$

$$\vec{v} = \vec{e} \times \vec{e} = 1, 4 \text{ وحدة طول.}$$

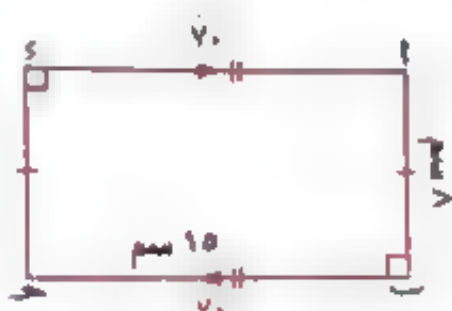
$$1, 4 = \frac{v}{e} = L$$

مثال ٢

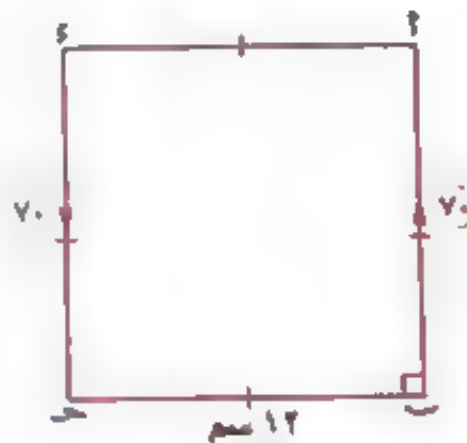
أوجد ج القياس الجبري لعزم الازدواج الذي معيار كل من قوته v_0 ثقل جرام والموضح في كل من الأشكال الآتية :



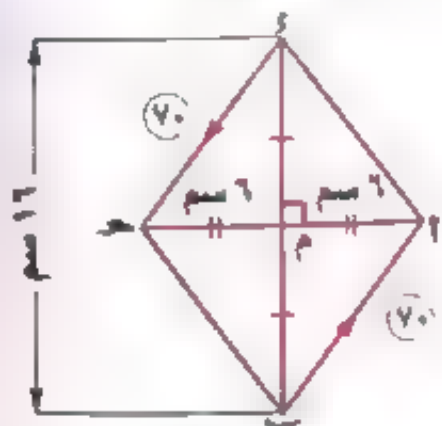
شكل (٣)



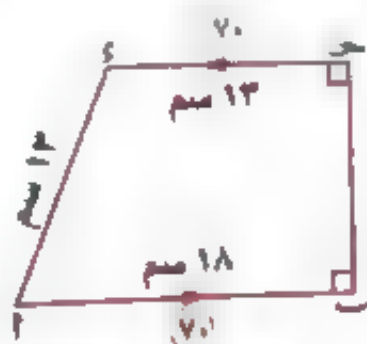
شكل (٢)



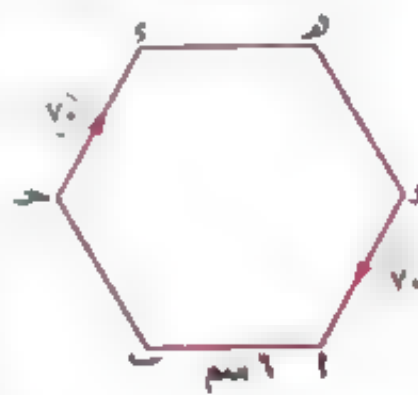
شكل (١)



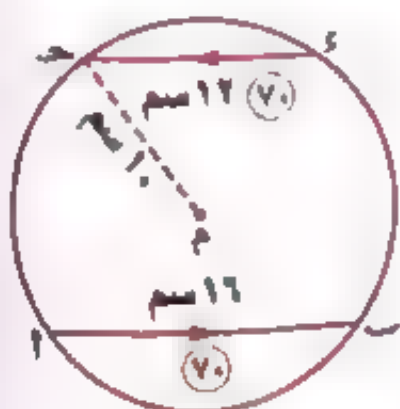
شكل (٦)



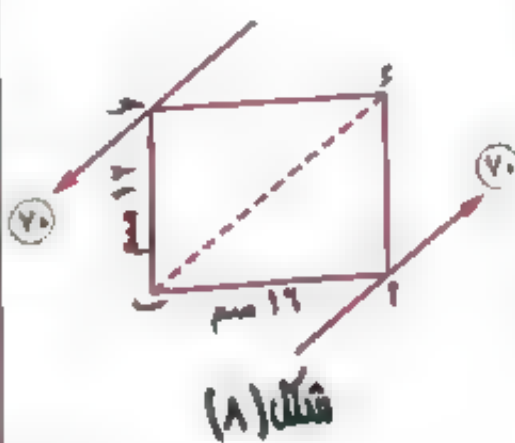
شكل (٥)



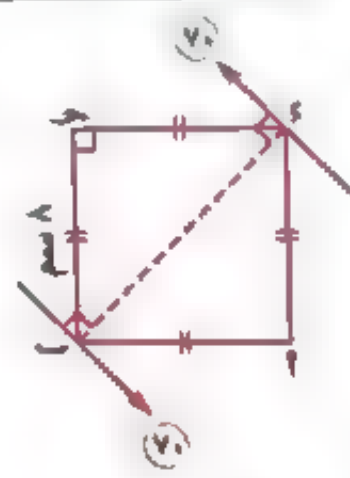
شكل (٤)



شكل (٩)



شكل (٨)



شكل (٧)

البيد

في شكل (١) : ل (ذراع الازدواج) = ب ح = ١٢ سم

ج (القياس الجبري لعزم الازدواج) = $١٢ \times ٧٠ = ٨٤٠$ ثقل جرام. سم.

في شكل (٢) : ل (ذراع الازدواج) = ا ب = ٨ سم

ج (القياس الجبري لعزم الازدواج) = $(٨ \times ٧٠) - = ٥٦٠$ ثقل جرام. سم.

في شكل (٣) : نرسم د و \perp ا ب فيكون د و هو ذراع الازدواج

$$ب ح \times د و = ا ب \times د و$$

(كل يساوي مساحة سطح متوازي الاضلاع)

$$١٢ \times ٦ = ٨ \times د و \therefore د و = \frac{٦ \times ١٢}{٨} = ٩ \text{ سم}$$

ج = $(٨ \times ٧٠) - = ٥٦٠$ ثقل جم. سم.

في شكل (٤) :

نصل ا ح فيكون طوله هو ذراع الازدواج ومن خواص السداسي المنتظم الذي طول ضلعه ل سم

$$يكون ا ح = ل = ٣\sqrt{٦} = ٣\sqrt{٦} \text{ سم}$$

ج = $(٣\sqrt{٦} \times ٧٠) - = ٤٢٠$ ثقل جم. سم.

في شكل (٥) :

نرسم د ه \perp ا ب فيكون د ه هو ذراع الازدواج

$$ا ه = ا ب - ب ح = ١٣ - ١٨ = ٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{من } \Delta ا ه د \text{ القائم الزاوية في ه يكون د ه} = \sqrt{(١٣)^2 - (٥)^2} = ١٢ \text{ سم}$$

ج = $١٢ \times ٧٠ = ٨٤٠$ ثقل جم. سم.

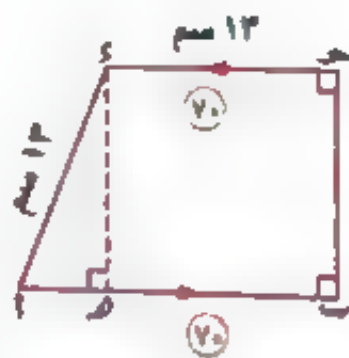
في شكل (٦) :

$$ا م = ٦ \text{ سم} ، م ب = \frac{١}{٢} ب ح = \frac{١}{٢} \times ١٦ = ٨ \text{ سم}$$

ومن $\Delta ا م ب$ القائم الزاوية في م يكون

$$ا ب = \sqrt{(٦)^2 + (٨)^2} = ١٠ \text{ سم (طول ضلع المعين)}$$

نرسم ح د \perp ا ب فيكون طوله هو ذراع الازدواج.



$$\therefore \frac{1}{4} \times 16 \times 12 = 48$$

= 48 سم (كل يساوي مساحة سطح المعين)

$$\therefore \frac{1}{4} \times 16 \times 12 = 48 \times 10 = 480$$

$$\therefore 480 = 9.6 \times 70$$

$$\therefore 480 = 9.6 \times 70 = 672 \text{ ثقل جم. سم.}$$

في شكل (٧) :

في المثلث $\triangle ABC$ القائم الزاوية في A يكون $AB = 8$ سم وهو ذراع الازدواج

$$\therefore 480 = 8 \times 70 = 560 \text{ ثقل جم. سم.}$$

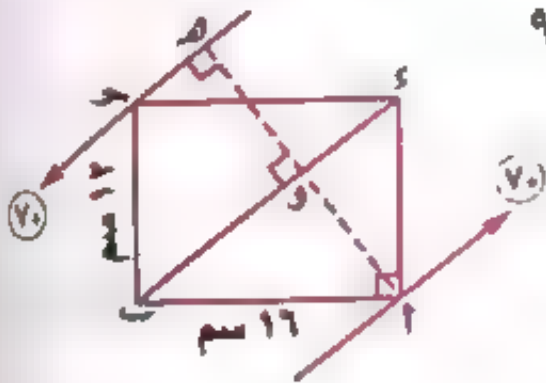
في شكل (٨) : نرسم AM عمود من A على خط عمل القوة V_0 المؤثرة في C

فيكون AM هو ذراع الازدواج

$$\therefore AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ سم ، } 480 = \frac{12 \times 16}{2} = 96$$

$$\therefore 96 = 20 \times 4.8$$

$$\therefore 96 = 19.2 \times 70 = 1344 \text{ ثقل جم. سم.}$$



في شكل (٩) : نرسم من M العمودين MD ، ME على AB ، CD

فيكون $AM = \frac{1}{4} AB = 8$ سم

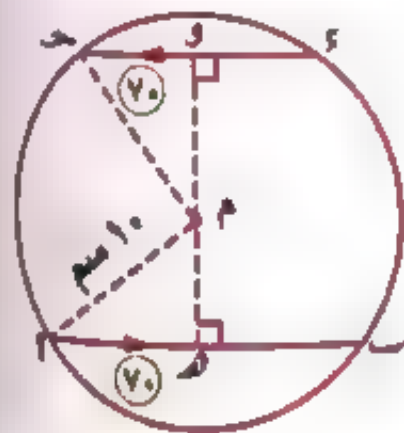
$$\therefore MD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ سم ، } ME = 10 - 8 = 2 \text{ سم}$$

$$\therefore ME = 2 \text{ سم ، } MD = 6 \text{ سم}$$

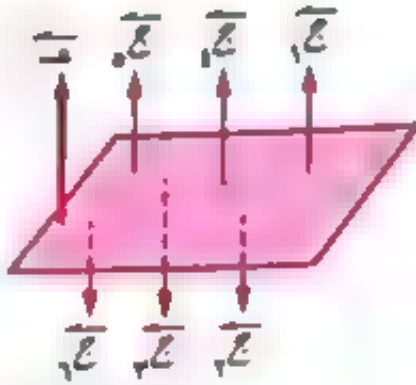
$$\therefore ME = 2 \text{ سم ، } MD = 6 \text{ سم}$$

$$\therefore MD = 6 \text{ سم ، } ME = 2 \text{ سم}$$

$$\therefore 14 = 8 + 6 = MD + ME = 14 \times 70 = 980 \text{ ثقل جم. سم.}$$



الازدواجات المستوية



يقصد بالازدواجات المستوية هي التي تقع خطوط عمل قوى هذه الازدواجات في مستوى واحد ، وفي هذه الحالة تكون جميع عزوم هذه الازدواجات متوازية لأنها تكون عمودية على مستوى القوى مما يمكننا أن ننسب جميع متجهات عزوم هذه الازدواجات إلى نفس متجه الوحدة — العمودي على مستوى الازدواجات ، وهذا يجعلنا نستطيع أن نتعامل مع القياسات الجبرية لهذه العزوم بدلاً من التعامل مع متجهات العزوم.

اتزان جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر

تعريف

يُقال لجسم متماسك إنه متزن تحت تأثير ازدواجين مستويين ، إذا كان مجموع عزومها هو المتجه الصفري.

أي أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين متجهي عزميهما

$$\vec{J}_1, \vec{J}_2 \text{ هو : } \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{0} \text{ أي } \vec{J}_1 = -\vec{J}_2$$

وفي هذه الحالة يُقال إن الازدواجين متوازنان.

وعموماً شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية

$$\text{عزومها } \vec{J}_1, \vec{J}_2, \dots, \vec{J}_n \text{ هو } \vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \dots + \vec{J}_n = \vec{0}$$

النتيجة

يتزن جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين أو أكثر إذا انعدم مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجات.

أي أن : شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير ازدواجين مستويين (شرط توازن ازدواجين)

القياسان الجبريان لمتجهي عزميهما J_1, J_2 هو :

$$J_1 + J_2 = 0 \text{ أي } J_1 = -J_2$$

وعموماً شرط توازن جسم متماسك تحت تأثير عدة ازدواجات مستوية القياسات

$$\text{الجبرية لعزومها } J_1, J_2, \dots, J_n \text{ هو } J_1 + J_2 + \dots + J_n = 0$$

تكاثر ازدواجين

تعريف

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى متجهى عزميهما.

أى أن : شرط تكافؤ الازدواجين المستويين \vec{J}_1 ، \vec{J}_2 هو : $\vec{J}_1 = \vec{J}_2$

النتيجة

يتكافأ ازدواجان مستويان إذا تساوى القياسان الجبريان لمتجهى عزميهما.

أى أن : الازدواجان المستويان \vec{J}_1 ، \vec{J}_2 يتكافآن إذا كان : $\vec{J}_1 = \vec{J}_2$

ملاحظات

① إذا اترن جسم تحت تأثير عدة قوى ، وازدواج قياسه الجبرى \vec{J}

فإن مجموعة القوى يجب أن تكون ازدواجاً قياسه الجبرى $-(\vec{J})$

أى أن الجسم لا يمكن أن يتزن تحت تأثير قوة وازدواج.

② الازدواج لا يكافئ إلا ازدواجاً آخر.

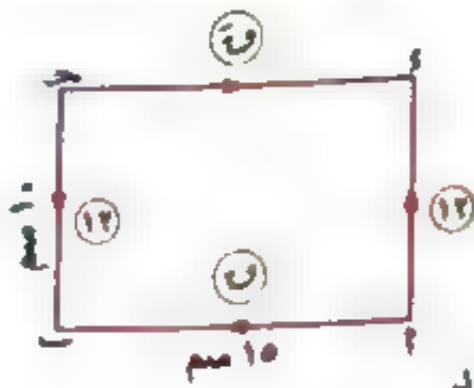
③ يتوقف تأثير الازدواج فى الأجسام المتماسكة على :

• معيار عزمه. • المستوى الذى تقع فيه قوته.

ولذلك لا يتغير تأثير الازدواج على الجسم إذا نقل من موضع لآخر فى مستويه مادام محتفظاً بعزمه مقداراً وإشارة أو حتى استبدل بازدواج آخر يكافئه مادام يقع معه فى نفس المستوى (أو فى مستوى آخر يوازيه).

مثال ٣

أب ح د مستطيل فيه : أب = ١٥ سم ، ب ح = ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ثقل كجم فى أ ب ، ح د ، ح د ، أ ب على الترتيب فإذا اترنت مجموعة هذه القوى فأوجد قيمة كل من : ١ ، ٢



الحل
القوتان اللتان مقدارهما ١٢ ، ١٢ ثقل كجم تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ج.

$$\therefore \text{ج.} = ١٢ \times ١٥ = ١٨٠ \text{ ثقل كجم. سم.}$$

الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم فى اتجاه مضاد

القوتان اللتان مقدارهما ١٠ ، ١٠ ثقل كجم تكونان ازدواجاً القياس الجبرى

$$\text{لعزمه} = ١٨٠ - \text{ثقل كجم. سم.}$$

$$\therefore ١٨٠ - ١٠ \times ١٠ = ٨٠ - \text{ثقل كجم. سم.}$$

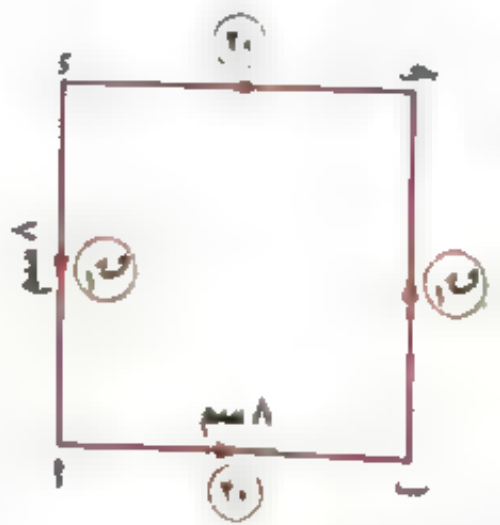
$$\therefore ١٨ = ١٠ = ١٠ \text{ ثقل كجم.}$$

مثال ٤

أب ح د مربع طول ضلعه ٨ سم ورؤوسه ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ فى ترتيب دورى عكس حركة دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقدارهما ٢٠ ، ٢٠ ثقل جرام فى ١ ، ٢ ح د أوجد :

١ قوتين متساويتين فى المقدار ١ ، ٢ تؤثران فى ٣ ح د بحيث تكونان ازدواجاً مكافئاً للازدواج المكون من القوتين المعلومتين.

٢ قوتين متساويتين فى المقدار ١ ، ٢ تؤثران فى ١ ، ٢ وخطا عملهما يوازيان القطر ٣ د وتكونان ازدواجاً مكافئاً للازدواج المكون من القوتين المعلومتين.



الحل
١ القوتان المعلومتان تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه

$$\text{ج.} = ٢٠ \times ٨ = ١٦٠ \text{ ثقل جم. سم}$$

ونفرض أن القوتين اللتين مقدارهما ١ ، ٢

تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ج. = ١٦٠

$$= ١٦٠ = ٨ \times ٢٠ \text{ ثقل جم}$$

$$\therefore \text{ج.} = ٢٠$$

$$\therefore ٢٠ = ٢٠ \text{ ثقل جم}$$

الازدواجين متكافئان

$$\therefore ١٦٠ = ١٦٠$$

٢ : ١٦٠ = ٢٠ ثقل جم. سم (موجب) \therefore قوتاه تعملان فى ٣ ح د ، ٤

القوتان المطلوبتان مقدار كل منهما ٢٠ ثقل جرام وتؤثران فى ٣ ح د ، ٤

٢) نفرض أن القوتين \vec{F}_1 و \vec{F}_2 المؤثرتين في A ، H

وتوازيان القطر \vec{BD} تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$

∴ الازدواجين متكافئان

∴ $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 160$ ثقل جم. سم وحيث أن \vec{F}_1 موجب :

∴ القوة التي تعمل في A تكون في اتجاه \vec{BD} والتي تعمل

في H تكون في اتجاه \vec{DB} ويكون :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = 160 \quad \therefore \vec{F}_1 = \frac{160}{\sqrt{2}} = 113.14 \text{ ثقل جرام}$$

∴ القوتان المطلوبتان مقدار كل منهما 113.14 ثقل جرام وتؤثر إحداها في A

في اتجاه \vec{BD} والأخرى في H في اتجاه \vec{DB}

مثال ٥

\vec{AB} قضيب خفيف طوله 40 سم مُعلق أفقياً من مسمار في منتصفه ، أثرت قوتان كل منهما 37.5 نيوتن في طرفيه إحداها رأسية إلى أعلى والأخرى رأسية إلى أسفل ، كما شد القضيب بخيط يميل عليه بزاوية قياسها 60° من نقطة عليه H وكان الشد في الخيط مقداره 25 نيوتن. أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة رابعة إذا أثرت على القضيب حفظته في حالة توازن في وضع أفقى.

الحل

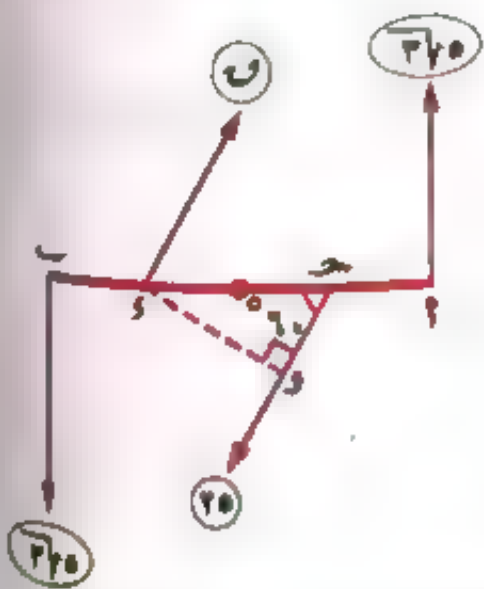
القوتان اللتان مقداراهما : 37.5 ، 37.5 نيوتن عند

طرفي القضيب تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه \vec{F}_1

$$\vec{F}_1 = 40 \times 37.5 = 1500 \text{ نيوتن. سم}$$

∴ الازدواج لا يتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم في اتجاه مضاد

∴ القوتان اللتان مقداراهما 25 ، 25 يجب أن تكونا ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه \vec{F}_2



خط عمل \vec{C} يميل على القضيب \vec{AB} بزاوية 60° لأعلى

$$\therefore J_1 = 200 \sqrt{3} \text{ نيوتن. سم}$$

$$\therefore J_2 = 25 \text{ نيوتن}$$

$$\therefore J_1 = 200 \times 25 = 5000 \text{ سم} \times 25 = 125000 \text{ سم} \times 25 = 3125000 \text{ سم}$$

$$\therefore J_2 = 25 \times 200 = 5000 \text{ سم} \times 200 = 1000000 \text{ سم}$$

\therefore نقطة J_2 تبعد عن نقطة J_1 مسافة 16 سم.

مثال ١

أب قضيب منتظم طوله 40 سم ومقدار وزنه 50 ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة في مستوى رأسي حول مفصل عند طرفه أ فإذا أثر على القضيب عندما كان رأسيًا ازدواج القياس الجبرى لعزمه 50 ثقل كجم. سم ويعمل في نفس المستوى الرأسي المار بالقضيب فأوجد في وضع الاتزان كلاً من رد فعل المفصل وقياس زاوية ميل القضيب على الرأسى.

الحل

القضيب في وضع الاتزان يكون واقعاً تحت تأثير :

① ازدواج القياس الجبرى لعزمه $J_1 = 50 \text{ ثقل كجم. سم}$

② وزنه ومقداره 50 ثقل كجم يؤثر في م منتصف \vec{AB}

رأسياً إلى أسفل.

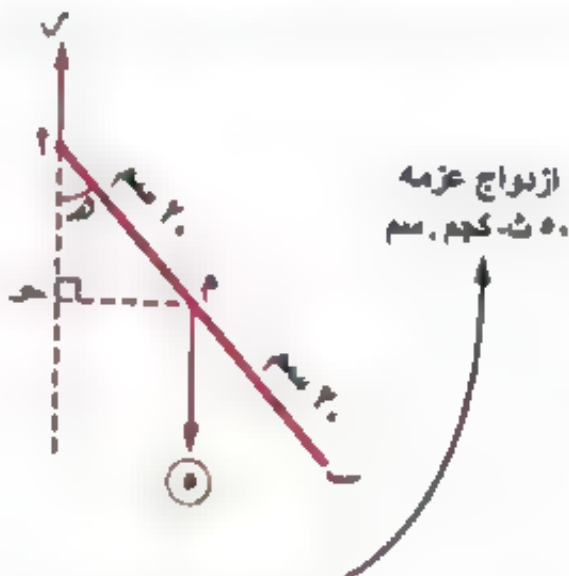
③ رد فعل المفصل عند أ وليكن R

\therefore الازدواج لايتزن إلا مع ازدواج آخر له نفس العزم في اتجاه مضاد

\therefore القوتان اللتان مقداراهما 50 ، يجب أن تكونا ازدواجاً القياس

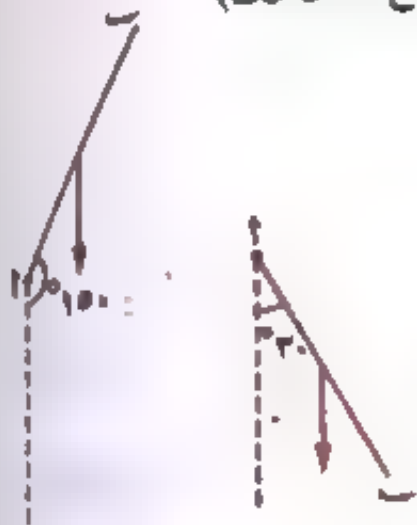
الجبرى لعزمه $J_2 = 50 \text{ ثقل كجم. سم}$

$\therefore R$ (مقدار رد فعل المفصل عند أ) = 50 ثقل كجم رأسياً إلى أعلى



∴ $50 = 4 \times 10$ سم ∴ $50 = 40$ سم ∴ $50 = 40$ سم

∴ $50 = 40$ سم (حيث 50 قياس زاوية ميل القضيب على الرأسى فى وضع التوازن)



$$\frac{1}{4} = \frac{1}{10} = \frac{40}{100}$$

∴ $50 = 40$ سم ∴ $50 = 40$ سم

∴ القضيب فى وضع التوازن يميل على الرأسى لأسفل بزاوية

قياسها 50° ، 40°

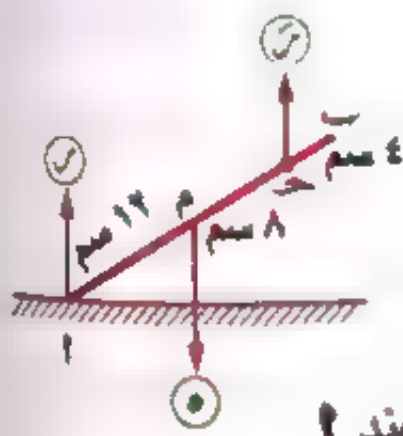
مثال ٧

أ- قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ومقدار وزنه ٥ ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة فى مستو رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب يبعد عن طرفه ب مسافة ٤ سم. فإذا استند القضيب بطرفه أ على سطح أفقى أملس فأوجد رد فعل كل من السطح الأفقى والمسمار على القضيب وإذا شد الطرف ب بقوة أفقية مقدارها ١٠ ثقل كجم حتى أصبح الضغط على السطح الأفقى مساوياً لوزن القضيب وكان القضيب يميل على الأفقى حينئذ بزاوية قياسها 30° فأوجد مقدار ١٠ ورد فعل المسمار على القضيب فى هذه الحالة.

الحل

فى الحالة الأولى : القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى :

① وزنه ومقداره ٥ ثقل كجم ويؤثر فى م منتصف أ ب رأسياً إلى أسفل.



② رد فعل السطح الأفقى الأملس ومقداره ١٠ ويكون رأسياً إلى أعلى عند أ

③ رد فعل المسمار عند ح وليكن مقداره م

∴ القضيب متزن بتأثير ثلاث قوى

∴ خطوط عمل القوى الثلاث يجب أن تتوازى أو تتلاقى فى نقطة واحدة

∴ الوزن ، رد فعل السطح م قوتان متوازيتان

∴ رد فعل المسمار \vec{R} يجب أن يوازيهما ويكون اتجاهه رأسياً إلى أعلى وحسب شروط
اتزان ثلاث قوى متوازية تكون محصلة القوتين \vec{R} ، \vec{R} تساوى فى المقدار القوة التى
مقدارها H ثقل كجم فى اتجاه مضاد

$$\therefore \vec{R} + \vec{H} = 0$$

(١)

$$8 \times \vec{R} = 12 \times \vec{H} \quad \text{أى : } \vec{R} = \frac{3}{2} \vec{H}$$

(٢)

$$\text{وبالتعويض من (٢) فى (١) : } \vec{H} = \frac{2}{3} \vec{R} + \vec{H} \quad \therefore \vec{H} = \frac{2}{3} \vec{R}$$

∴ \vec{R} (رد فعل السطح الأفقى) = ٢ ثقل كجم رأسياً إلى أعلى

، \vec{R} (مقدار رد فعل المسمار) = $2 \times \frac{3}{2} = 3$ ثقل كجم رأسياً إلى أعلى.

فى الحالة الثانية : القضيب متزن بتأثير أربع قوى :



① وزنه ومقداره H ثقل كجم رأسياً إلى أسفل.

② رد فعل المستوى الأفقى الأملس ومقداره

= مقدار الوزن = H ثقل كجم رأسياً إلى أعلى.

③ القوة \vec{R} أفقية عند

④ رد فعل المسمار عند H وليكن مقداره \vec{R}

القوتان اللتان مقدارهما H ، H ثقل كجم تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه J

$$\therefore J = 8 \times 0 = 4 \times 0 = 2 \times 0 = 0 \quad \text{أى : } 2 \times 0 = \frac{2}{3} \times 12 \times 0 = 2 \times 0 = 0 \quad \text{ثقل كجم. سم}$$

∴ الازدواج لايتزن إلا مع ازدواج آخر يساويه فى العزم ومضاد له فى الاتجاه

∴ القوتان اللتان مقدارهما H ، \vec{R} تكونان ازدواجاً القياس الجبرى

$$\text{لعزمه } J = 2 \times 0 = 2 \times 0 = 0 \quad \text{ثقل كجم. سم}$$

$$\therefore \vec{R} = H \quad \text{وخطا عملهما متوازيان ومتضادان ، } H \times 0 = 2 \times 0 = 0$$

$$\therefore H \times 0 = 2 \times 0 = 0 \quad \text{أى : } H \times 0 = \frac{1}{3} \times 4 \times 0 = 0$$

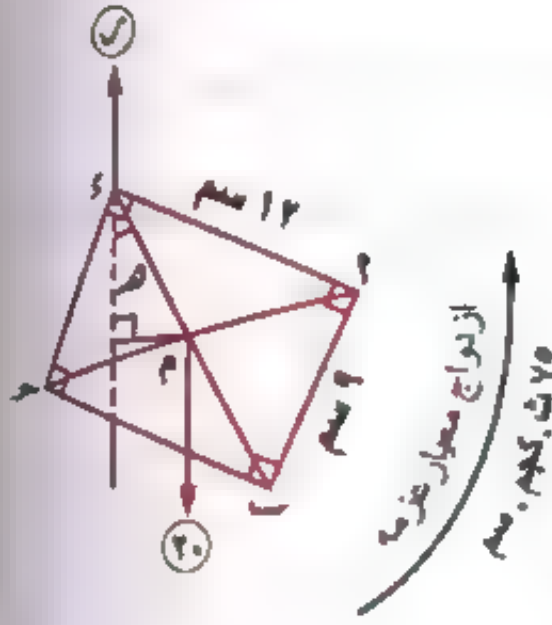
$$\therefore H = 10 \quad \text{ثقل كجم}$$

$$\therefore \vec{R} = 10 \quad \text{ثقل كجم أفقية فى اتجاه مضاد لاتجاه } H$$

مثال ٨

أ ب ح د صفيحة مستطيلة الشكل حيث : $أ ب = ٩$ سم ، $ب ح = ١٢$ سم ووزنها ٢٠ ثقل كجم ويؤثر في نقطة تقاطع القطرين. علقت الصفيحة في مسمار رفيع أفقى بالقرب من الرأس د بحيث كان مستواها رأسياً ، فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ٧٥ ثقل كجم. سم واتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة. فأوجد قياس زاوية ميل $د ب$ على الرأسى فى وضع الاتزان.

الحل



∴ متجه عزم الازدواج عمودى على مستوى الصفيحة

∴ الازدواج يعمل فى مستوى الصفيحة نفسها وفى

وضع الاتزان تكون الصفيحة متزنة بتأثير :

- ١) الازدواج الذى معيار عزمه ٧٥ ثقل كجم. سم.
- ٢) وزنها ومقداره ٢٠ ثقل كجم ويؤثر فى م رأسياً إلى أسفل.
- ٣) رد فعل المسمار عند د وليكن م

∴ القوتان اللتان مقداراهما ٢٠ م تكونان ازدواجاً

القياس الجبرى لعزمه $= ٧٥ -$ ثقل كجم. سم

∴ م (مقدار رد فعل المسمار عند د) $= ٢٠$ ثقل كجم رأسياً إلى أعلى

وبفرض أنه فى وضع الاتزان يميل $د ب$ على الرأسى بزاوية θ

$$\therefore ٧٥ - = ٢٠ \times م د ح ا هـ$$

$$\therefore م د ح ا هـ = \frac{١}{٢} = ٧,٥ \text{ سم} = \sqrt{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = \sqrt{١} = ١ \text{ سم}$$

$$\therefore ٧٥ - = ٢٠ \times ٧,٥ \text{ ح ا هـ} \therefore ٧٥ = ١٥٠ \text{ ح ا هـ}$$

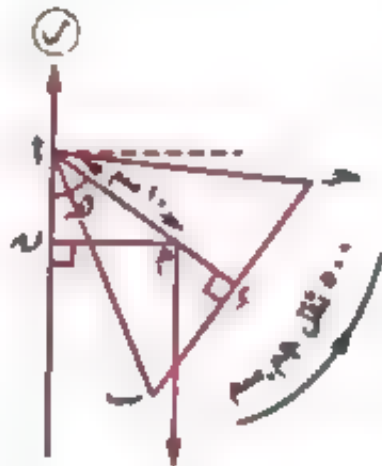
$$\therefore \frac{١}{٢} = \text{ح ا هـ}$$

∴ θ (زاوية ميل $د ب$ على الرأسى لأسفل فى وضع الاتزان) $= ٣٠^\circ$ ، ١٥٠°

أب ح صفيحة على شكل مثلث متساوي الأضلاع ارتفاعه ١٥ سم ووزنها ١٠٠ ثقل جرام ويؤثر عند نقطة تلاقي متوسطات المثلث. ثُقبَت الصفيحة ثقبًا صغيرًا بالقرب من الرأس أ ثم عُلقت من هذا الثقب في مسمار رفيع بحيث كان مستواها رأسيًا ، أثر على الصفيحة ازدواجًا معيار عزمه ٥٠٠ ثقل جرام . سم في مستويها . أوجد ميل الضلع أ ب على الأفقى في وضع التوازن.

الحل

∴ الصفيحة متزنة تحت تأثير :



① ازدواج القياس الجبرى لعزمه ج = ٥٠٠ ثقل جم . سم .

② وزن الصفيحة ومقداره ١٠٠ ثقل جرام .

③ رد فعل المسمار عند أ ومقداره م ثقل جرام

∴ الازدواج يتزن مع ازدواج مثله يساويه في العزم ويضاده في الاتجاه

∴ القوتان اللتان مقداراهما (م ، ١٠٠) ثقل جرام تكونان ازدواجًا القياس الجبرى

لعزمه ج = ٥٠٠ - ثقل جرام . سم

$$٥٠٠ - = م \times ١٠٠ - \therefore$$

$$\therefore م = ٥ \text{ سم}$$

وبفرض أن أ ب يصنع زاوية قياسها هـ مع الرأسى

$$\therefore م \times ٥ = \frac{١٠٠}{٢} = \frac{٥}{١} = \frac{١}{٢} \therefore هـ = ٣٠^\circ ، ١٥٠^\circ$$

إذا كانت : هـ = ٣٠

∴ أ ب رأسى لأسفل أى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠

$$٣٠ = (د \text{ و } ا ب)$$

إذا كانت : هـ = ١٥٠

$$٣٠ = (د \text{ و } ا ح) \therefore ا ح رأسى لأعلى$$

∴ أ ب يميل على الأفقى لأعلى بزاوية قياسها ٣٠

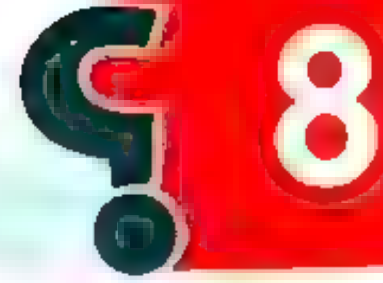
ملاحظة

في المثال السابق : إذا تبادل أ ب ، ا ح موضعيهما فإن أ ب يميل على الأفقى لأسفل بزاوية قياسها ٣٠ أو أ ب يكون رأسيًا لأعلى أى يميل على الأفقى بزاوية قياسها ٩٠



على الازدواج - اتران جسم تحت تأثير ازدواجين أو أكثر - تكافؤ ازدواجين

من أسئلة الكتاب المدرسي



أولاً: تمارين على القياس الجبري لعزم الازدواج

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) القوتان المؤثرتان على عجلة قيادة السيارة وتحدثان دوراناً لعجلة القيادة تكونان

(أ) احتكاكاً. (ب) ازدواجاً.

(ج) قوة عمودية على عجلة القيادة. (د) محصلة غير صفيرية.

٢) لإحداث ازدواج من قوتين يجب أن تكون القوتان

(أ) متساويتين في المقدار. (ب) متضادتين في الاتجاه.

(ج) ليسا على خط عمل واحد. (د) كل ماسبق.

٣) إذا كان ازدواج معيار عزمه ٣٥٠ نيوتن. م ومعيار إحدى قوتيّه ٧٠ نيوتن ، فإن طول ذراع عزم الازدواج يساوي

(أ) ٥٠ متراً. (ب) ٥ أمتار. (ج) ٥ سم. (د) ٢٤٥٠٠ سم.

٤) أي من الشروط الآتية لا تغير من تأثير الازدواج على الجسم ؟

(أ) إزاحة الازدواج إلى موضع جديد في مستواه.

(ب) إزاحة الازدواج إلى مستوى آخر يوازي مستواه.

(ج) دوران الازدواج في نفس مستواه.

(د) كل ما سبق.

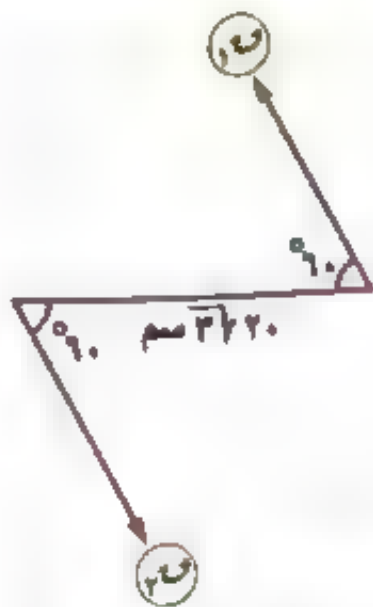
٥) إذا كانت : \vec{Q}_1 ، \vec{Q}_2 قوتين تكونان ازدواجاً وكانت $\vec{Q}_1 = 3\vec{S} - 2\vec{V}$ فإن : $\vec{Q}_2 = \dots\dots\dots$

(أ) $3\vec{S} - 2\vec{V}$

(ج) $2\vec{S} - 3\vec{V}$

(ب) $2\vec{S} + 3\vec{V}$

(د) $3\vec{S} - 2\vec{V}$



إذا كان : $ق = ٧$ نيوتن ، القوتان $ق$ ، $ق$ ،
تكونان ازدواجًا فإن القياس الجبري لعزم
الازدواج = نيوتن. سم.

(ب) 32.70

(١) ٢١٠

(ج) 32.140

(د) ١٤٠

٧ (دوراوول ٢٠١٨) إذا كان : $ق = ٦$ سم + $ق = ٤$ سم ، $ق = ٤$ سم - $ق = ٢$ سم
قوتى ازدواج فإن : $ق + ١ =$

(د) ٢

(ج) $٢-$

(ب) $١٠-$

(١) ١٠

٨ قوتان $ق = ٤$ سم - $ق = ١$ سم ، $ق = ٢$ سم + $ق = ٥$ سم تكونان ازدواجًا
فإن : $ق + ١٢ =$

(د) ١٢

(ج) ٨

(ب) $٩-$

(١) $١٢-$

٩ إذا كانت القوتان : $ق = ٥$ سم + $ق = ١$ سم + $ق = ٣$ سم
، $ق = ٢$ سم - $ق = ٩$ سم + $ق = ٦$ سم تكونان ازدواجًا
فإن : $ق + ١ + ٢ =$

(د) ١٧

(ج) ١

(ب) صفر

(١) $١-$

١٠ إذا كان : $ق = ٢$ ، $ق = ٣$ هما قوتا ازدواج وكان : $ق = ٤$ سم - $ق = ٢$ سم
فإن : $ق =$

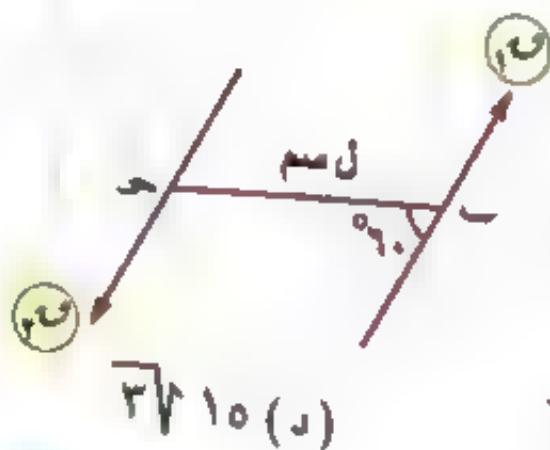
(ب) ٦ سم - $ق = ٢$ سم

(١) ٦ سم + $ق = ٢$ سم

(د) ٦ سم + $ق = ٢$ سم

(ج) ٦ سم - $ق = ٢$ سم

١١ (دوراوول ٢٠١٨) في الشكل المقابل :



إذا كانت : $ق = ٧$ نيوتن والقوتان $ق$ ، $ق$ ،
تكونان ازدواجًا القياس الجبري لعزمه ٢١٠ نيوتن سم

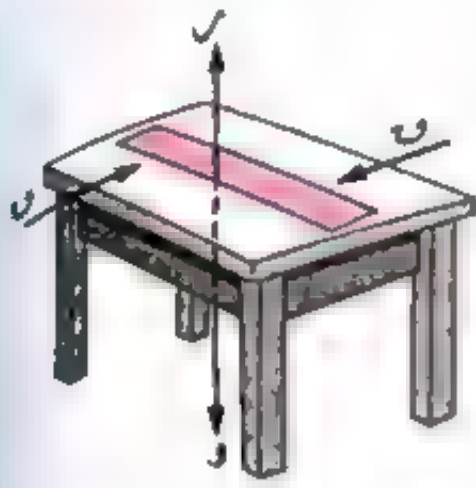
فإن : $ق =$ سم

(د) 32.10

(ج) 32.20

(ب) 32.30

(١) ٢٠



١٢ الشكل المقابل يمثل مسطرة وزنها (و) موضوعة

على نضد أفقى أملس وأثر عليها قوتين مستويتين

ومتوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه (و ، و -)

لذلك تكون المسطرة

(أ) ساكنة وفى حالة اتزان.

(ب) تتحرك حركة انتقالية.

(ج) تتحرك حركة دورانية.

(د) تكون على وشك الحركة.

١٣ قوتان $\vec{F}_1 = 30 \text{ س} -$ ، $\vec{F}_2 = 40 \text{ ص} +$ ، $\vec{F}_3 = 20 \text{ س} -$ ، $\vec{F}_4 = 40 \text{ ص} +$ مقاسة

باليوتن البعد بينهما ٢ أمتار فإن معيار مجموع عزوم القوى حول النقطة (١ ، ٤ -) هو

(أ) ٥٠ (ب) ١٣٠ (ج) ١٤٠ (د) ١٥٠

١٤ قوتان تكونان ازدواج مقدار كل منهما ٣٠ نيوتن ومقدار عزم الازدواج ١٢٠ نيوتن سم

إذا زاد مقدار كل من القوتين ٥ نيوتن فإن مقدار عزم الازدواج الناتج يساوى

(أ) ١٤٠ (ب) ١٣٠ (ج) ١٢٠ (د) ١١٠

٢ أثرت القوتان $\vec{F}_1 = 4 \text{ س} -$ ، $\vec{F}_2 = 3 \text{ ص} -$ ، $\vec{F}_3 = 5 \text{ س} -$ ، $\vec{F}_4 = 8 \text{ ص} -$ فى النقطتين ١ (٨ ، ٥) ، ٢ (٥ ، ٢) على الترتيب فكونتا ازدواجاً. فأوجد متجه عزم هذا الازدواج وذراع العزم.

١٨- ٢، ٦ وحدة طول

٣ (دور اول ٢٠٠٦) تؤثر القوتان $\vec{F}_1 = 4 \text{ س} -$ ، $\vec{F}_2 = 3 \text{ ص} -$ ، $\vec{F}_3 = 2 \text{ س} -$ ، $\vec{F}_4 = 1 \text{ ص} -$ عند النقطتين ١ (١ ، ١) ، ٢ (٢ ، ١) على الترتيب. إذا كونت القوتان ازدواجاً

فأوجد قيمة كل من الثابتين م ، ن ثم احسب طول العمود المرسوم من نقطة ب إلى خط عمل القوة \vec{F}_1

٢- ، ٣- ، ١٣/٢ وحدة طول

الدرس الاول

١ أثرت القوتان (٢س + ٣ص) ، (٥س - ٢ص) في النقطتين ح ، د على الترتيب حيث : ح (١ ، ٢) ، د (١ ، ٣) فإذا كانت القوتان تكونان ازدواجًا. أوجد قيمة كل من ١ ، ٢ ، ٣ ، ثم أوجد عزم الازدواج ، أوجد أيضًا البعد العمودي بين خطي عمل القوتين.

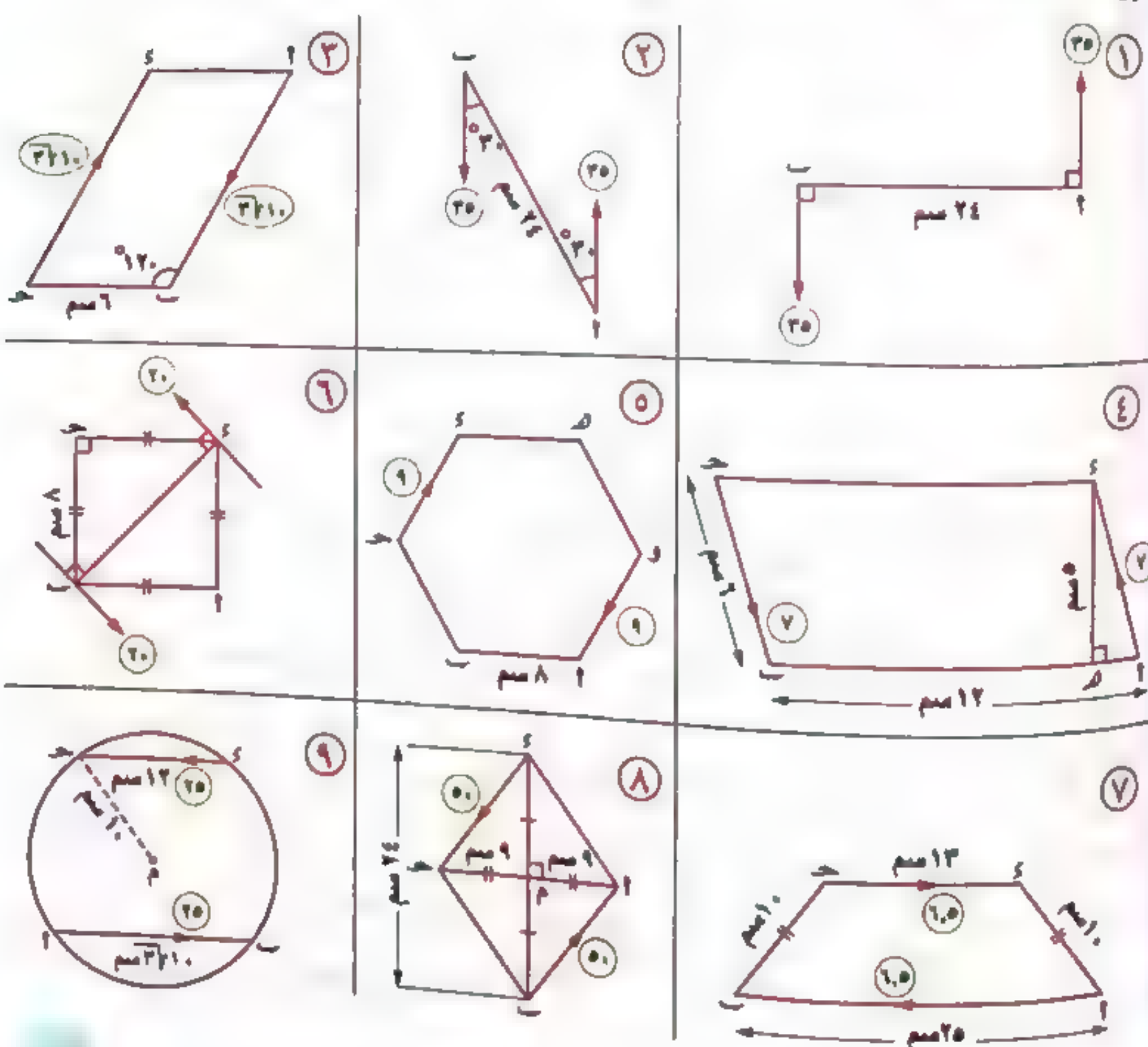
٢ ١٠٠ ، ٢٩

٣ أثرت القوتان (٣س - ٥ص) ، (٢س + ٥ص) في النقطتين ١ ، ٢ على الترتيب ، متجهها موضعهما (٦س + ٣ص) ، (٤س + ٣ص). برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

٤ ١٠٠ ، ٢٩

٥ أثرت القوى ١ = ٦ص في نقطة الأصل كما أثرت ٢ = -٦ص في النقطة (٢ ، ٠) بين أن مجموع عزوم القوى بالنسبة لأي نقطة (س ، ص) لا يعتمد على س ، ص

٦ أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج المؤثر في كل من الاشكال الآتية حيث إن القوة تقاس بوحدة النيوتن.



قاسية
(١ ، ٤-)

١٠
نيوتن سم
اوى

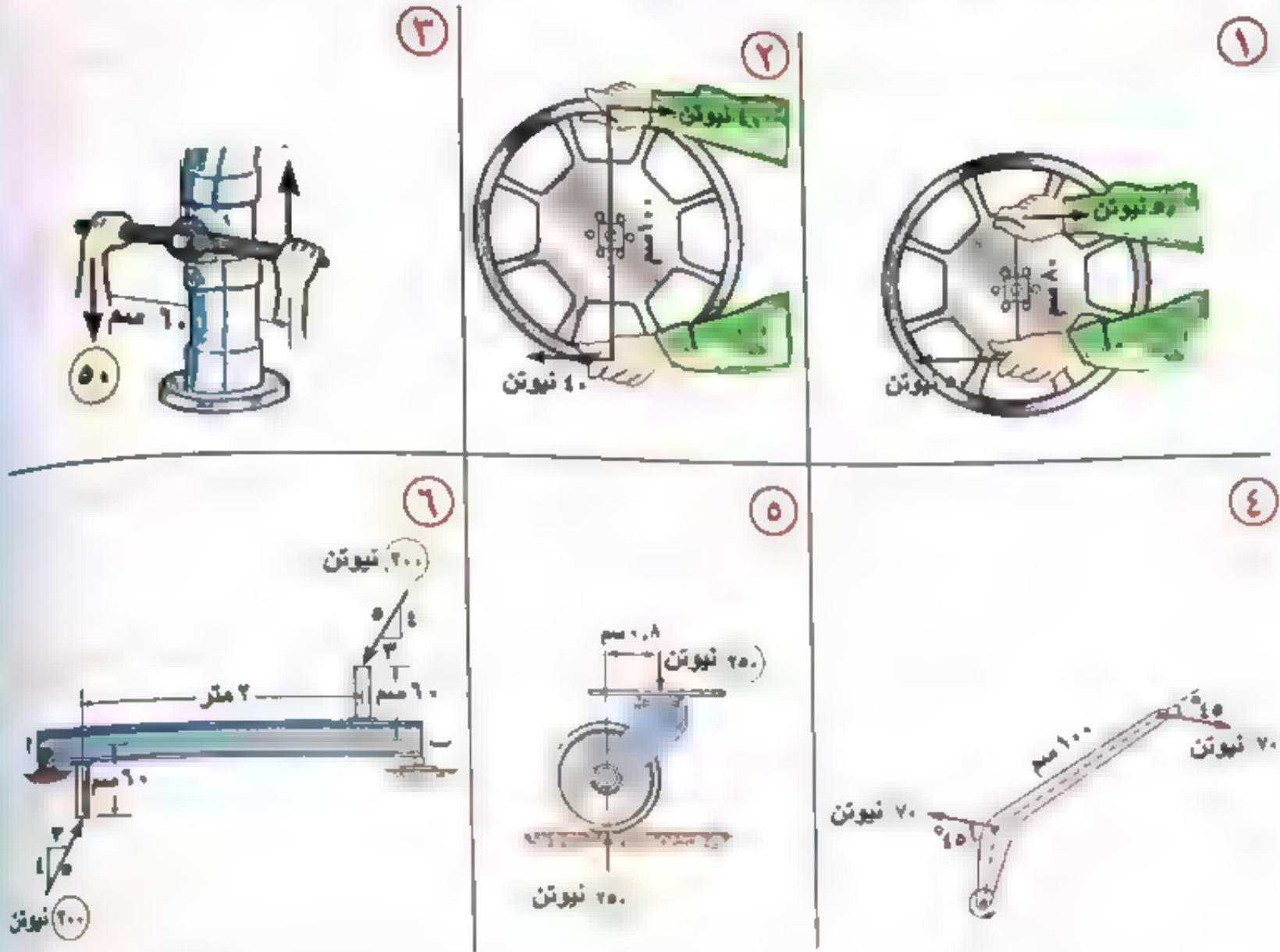
١١
٠ (٥ ، ٣)

١ وحدة طول

٢ ص

٣ ازدواجًا
٤ إلى خط
٥ وحدة طول

٨ أوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المؤثر فى كل من الأشكال الآتية :



٩ أ ب ح د مربع طول ضلعه ١٢ سم ، $\vec{H} \equiv \vec{B} \text{ ح}$ ، $\vec{D} \equiv \vec{A} \text{ د}$

بحيث : $\vec{B} = \vec{D} = 7 \text{ سم}$ أوجد معيار عزم الازدواج الذى معيار كل من قوتي ٢٩
ثقل جرام وتؤثران فى \vec{B} و \vec{D} ، \vec{H}

٢٥٢٠ ثقل جم. سم.

١٠ أ ب ح د مربع طول ضلعه ١٨ سم فرضت النقطتان ه ، و على القطر ب د بحيث :

$$\vec{H} = (\vec{D} \text{ ح د}) = (\vec{B} \text{ د ب}) = 60^\circ$$

أوجد معيار عزم الازدواج الذى معيار كل من قوتي ١٠ ثقل كجم وتؤثران
فى و أ ، \vec{H} ، \vec{B}

٢١٩٠٠ ثقل كجم. سم.

١١ أ ب ح د مستطيل فيه : $\vec{A} = 12 \text{ سم}$ ، $\vec{B} = 5 \text{ سم}$ أثرت فى أ ، ح قوتان معيار

كل منهما ٣٩ نيوتن وخطا عملهما فى اتجاه \vec{B} ، \vec{D}

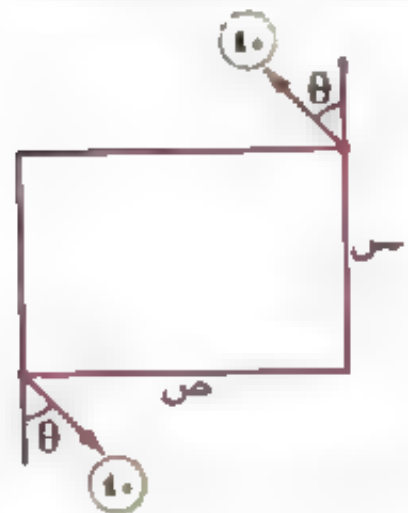
أوجد معيار عزم الازدواج الحادث.

٣٦٠٠ نيوتن. سم.

١١ ا ب ح د هـ معين فيه طول قطره $\overline{أح} = ١٤$ سم ، $١٠ = (١٤) \sin ٦٠^\circ$
أوجد معيار عزم الازدواج الذي مقدار كل من قوتيّه ٥٠ ثقل جرام وتؤثران
في $\overline{أح}$ ، $\overline{ح د}$
٢٥٠٠ ثقل جم . سم

١٢ ا ب ح د هـ و سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوة قدرها ٨ نيوتن في ح د
كما أثرت في الرأس أ قوة أخرى لها نفس المعيار وفي اتجاه هـ ح أوجد معيار عزم
الازدواج الحادث.
١٢٠٠ نيوتن . سم

١٣ الشكل المقابل :



يوضح قوتين مقدار كل منهما ٤٠ نيوتن ، تؤثران على طرفي
صفحة مستطيلة الشكل أبعادها س ، ص سم.

أوجد عزم ازدواج القوتين في كل من الحالات الآتية :

١) $س = ٣$ سم ، $ص = ٤$ سم ، $\theta = ٠^\circ$ صفر

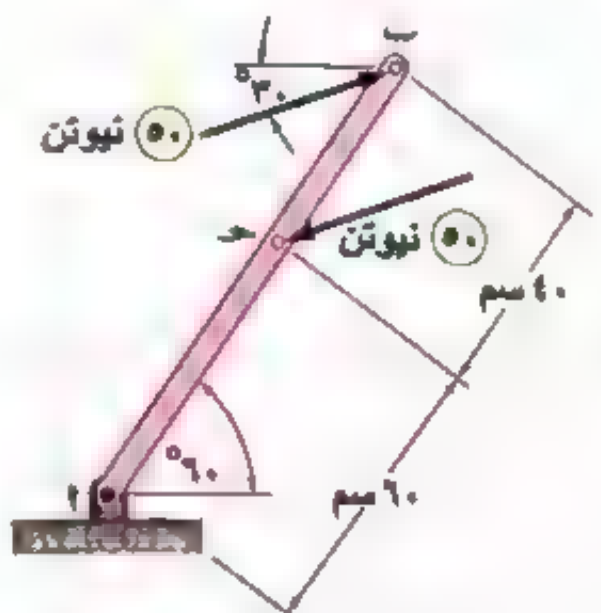
٢) $س = ص = ٦$ سم ، $\theta = \frac{\pi}{٤}$

٣) $س = ٠$ ، $ص = ٥$ سم ، $\theta = ٢٠^\circ$

٤) $س = ٦$ سم ، $ص = ٠$ ، $\theta = ٩٠^\circ$

٥) $س = ٥$ سم ، $ص = ١٢$ سم ، $\theta = \frac{٥}{١٢}$

١٤ الشكل المقابل :



يوضح قوتين معيار كل منهما ٥٠ نيوتن
، تؤثران على رافعة $\overline{أ ب}$

أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج بطريقتين :

١) باستخدام البعد العمودي بين القوتين.

٢) بإيجاد مجموع عزوم القوتين بالنسبة لنقطة أ

..... ١٠٠٠ نيوتن . سم

الدرس الاول

١- ح د مربع طول ضلعه ١٢ سم رؤوسه ١ ، ب ، ج ، د في ترتيب دوري عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما $2\sqrt{5}$ ، $2\sqrt{5}$ ثقل جرام أحدهما في الرأس ب في اتجاه أ ح والآخرى في الرأس د في اتجاه ح أ أوجد قوتين متساويتين في المقدار تؤثران في أ ب ، ح د وتكونان ازدواجاً يكافئ الازدواج المكون من القوتين المعطيتين.

١٠٠ ، ١٠٠

٢- ح د متوازي أضلاع فيه : أ ب = ٥ سم ، ب ج = ٨ سم ، طول العمود المرسوم من د على ب ح = ٣ ، ٥ سم. أثرت قوتان مقداراهما ٢٠ ، ٢٠ نيوتن في أ ب ، ح د أوجد معيار كل من القوتين اللتين تؤثران في ح ب ، أ د وتحدثان اتزاناً مع القوتين المعطيتين.

٢٢ ، ٢٢ نيوتن

٣- ح د مستطيل فيه : أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٨ سم ، قوتان مقدار كل منهما ٢٥ ثجم تؤثران في ب أ ، د ح أوجد مقدار كل من القوتين المؤثرتين في ب ، د عموديتين على ب د بحيث تحدثان اتزاناً مع القوتين المعطيتين.

٢٠ ، ٢٠ ثجم

٤- ح د مربع طول ضلعه ١ متر تؤثر قوتان معيار كل منهما ٤ ثكجم في أ ب ، ح د كما تؤثر قوتان خارج المربع معيار كل منهما ١٠ مقدراً بوحدات ثكجم عند د ، ب بحيث تصنع الأولى مع د أ ، الثانية مع ب ح زاويتين متساويتين في القياس ، قياس كل منهما 15° ، عين قيمة θ حتى يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المكون من القوتين الأخريين.

$\frac{64}{3}$ ثكجم

٥- ح د مستطيل فيه : أ ب = ١٠ سم ، ب ج = ٨ سم ، أثرت قوتان مقدار كل منهما ٨ نيوتن في أ ب ، ح د على الترتيب. كما أثرت قوتان خارج المستطيل مقدار كل منهما ١٠ نيوتن عند ب ، د بحيث تصنع الأولى مع ب ح والثانية مع د أ زاويتين متساويتين في القياس ، قياس كل منهما 15° أوجد قيمة θ حتى يتكافأ الازدواج المكون من القوتين الأوليين والازدواج المكون من القوتين الأخيرتين.

٦٢ ، ٤٠ نيوتن

المحاضر (استاذ - مدرس) ١٧٢ / ٢٥٧

١٠ أ ب ح د مستطيل فيه : $أ = ١٢$ سم ، $ب = ٥$ سم ، ورؤوسه أ ، ب ، ج ، د ، هـ في ترتيب دوري عكس اتجاه دوران عقارب الساعة أثرت قوتان مقداراهما ٦٥ ، ٦٥ نكل جرام في أ ، ب ، ح د أوجد قوتين متساويتين تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعلومتين بحيث :

① تؤثران في ب ح د ، أ

② تؤثران في ب ، د وعموديتان على ب د

③ تؤثران في أ ، ح وتوازيان القطر ب د

١١ أ ب ح د هـ سداسي منتظم طول ضلعه ل سم. أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٤ ٢١ نيوتن في ح د ، و أ أوجد القوتين المؤثرتين في أ ، د وعموديتين على أ د بحيث تحدثان اتزانًا مع القوتين المعلومتين.

١٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : $\vec{ج} ، \vec{ح}$ ازدواجين متزنين وكان $\vec{ج} = ٢٠$ غ

فإن : $\vec{ج} - \vec{ح} = \dots\dots\dots$

(١) $\vec{٠}$ (ب) $\vec{٤٠}$ (ج) $\vec{٢٠}$ (د) $\vec{٤٠}$

② إذا تكافأ ازدواجين فإن :

(١) معيار جميع القوى المكونة للازدواجين يكون متساو.

(ب) ذراع الازدواج الأول = ذراع الازدواج الثاني.

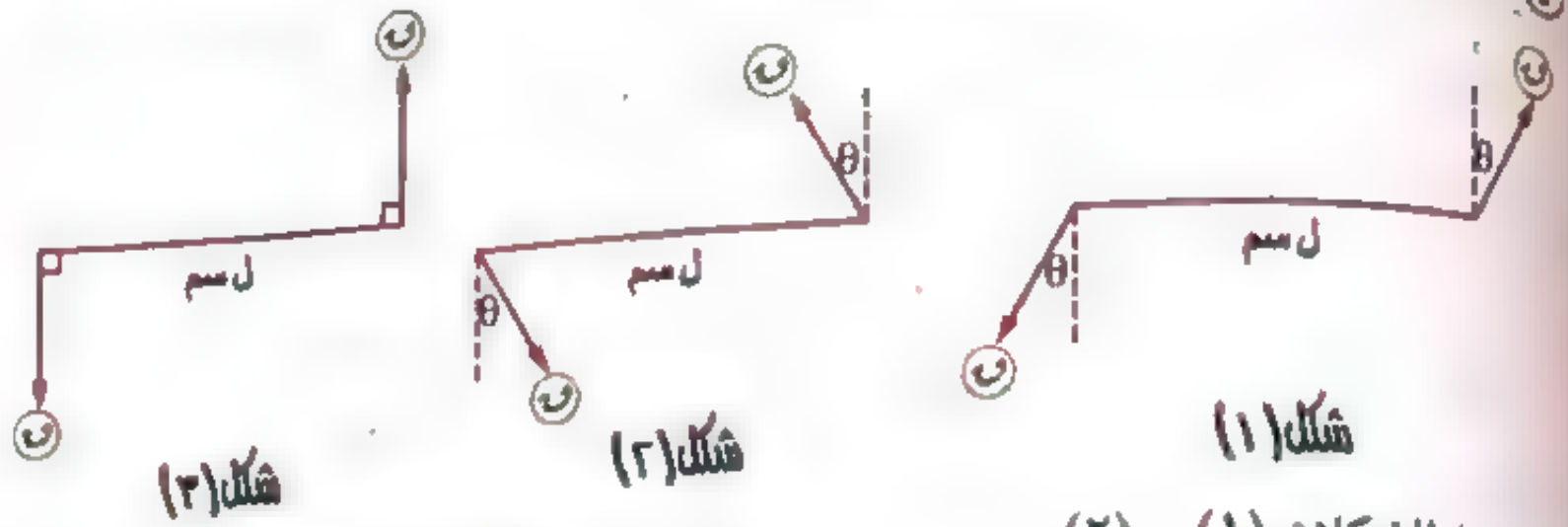
(ج) مجموع القياسات الجبرية لعزوم الازدواجين = صفر

(د) القياسات الجبرية لعزوم الازدواجين متساوية.

③ ازدواج مكون من قوتين قيمة كل منهما ١٢ نيوتن والمسافة العمودية بينهما ٨ سم يكافئ الازدواج الناشئ من قوتان المسافة العمودية بينهما ٦ سم ومقدار أي من القوتين = نيوتن.

(١) ٨ (ب) ١٦ (ج) ١٢ (د) ٤

٤ أي الازدواجات الآتية تكون متكافئة ؟

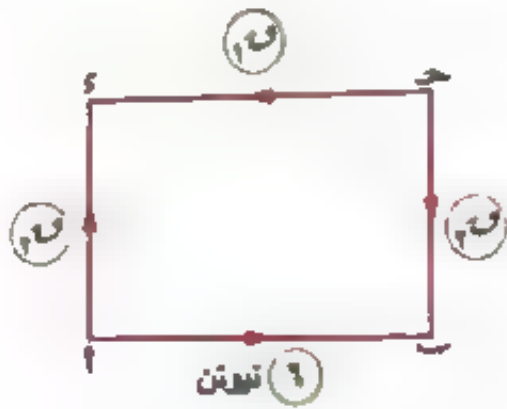


شكل (١)

(١) الشكلان (١) ، (٢)

(ج) الشكلان (١) ، (٣)

٥ في الشكل المقابل :



٤ (د)

أ ب ح د مستطيل فيه : $12 = 8 = 1$ سم

، $8 = 1$ سم أثرت القوى المبينة مقاديرها واتجاهاتها بالرسم فكونت ازدواجين متوازنين

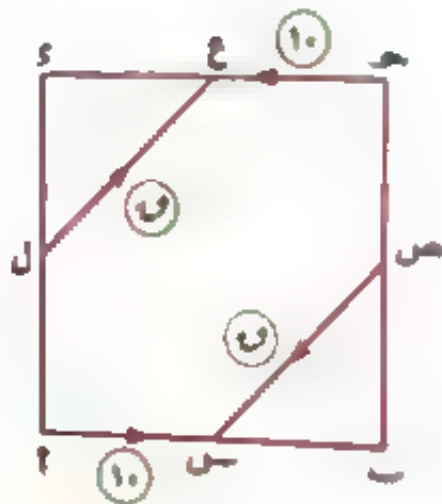
فإن : $1 - 8 = 12$ نيوتن.

٢ (ج)

٢- (ب)

٤- (١)

٦ في الشكل المقابل :



١٠ (ب)

٢٠ (د)

س ، ص ، ع ، ل منتصفات أضلاع المربع

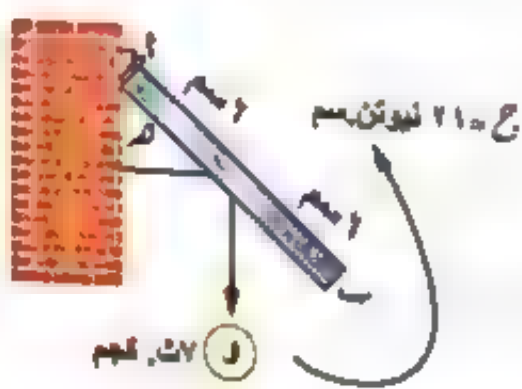
أ ب ح د أثرت القوى المبين مقاديرها واتجاهاتها فاتزن

فإن : $10 = 10$ ثقل جرام.

٢٢٥ (١)

٢٢١٠ (ج)

٧ في الشكل المقابل :



٢١ (د)

١٢ (ج)

أ ب قضيب منتظم وزنه ٧ ثقل كجم يتصل

طرفه أ بمفصل في حائط رأسى اتزن

بتأثير ازدواج عزمه ٢١ نيوتن سم فإن :

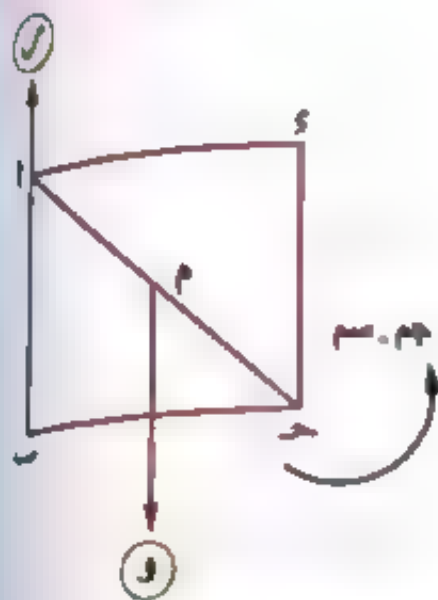
أولاً : $7 = 21$ ثقل كجم.

٧ (ب)

٣ (١)

ثانيًا : $\Delta = \dots\dots\dots$

- (أ) ١٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

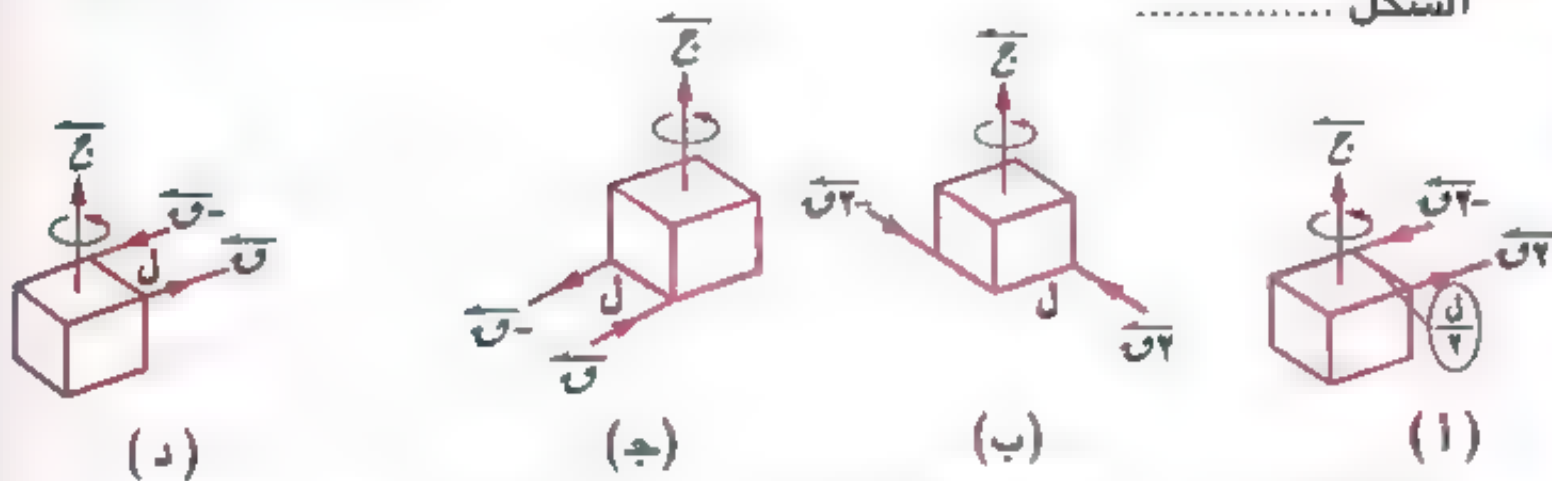


٨) أ ب ح د صفيحة رقيقة مربعة منتظمة تدور في مستوى رأسي حول مسمار في ثقب عند أ وطول ضلعها ٥٠ سم اتزنت بحيث كان الضلع أ ب منطبق على الرأسى بتأثير ازدواج معيار عزمه ٢٥٠ ث.جم.سم ، اتجاهه عمودى على مستوى الصفيحة

فإن : $\Delta = \dots\dots\dots$ ثقل.جم.

- (١) ٢ (ب) ٥ (ج) ١٠ (د) ٢٥

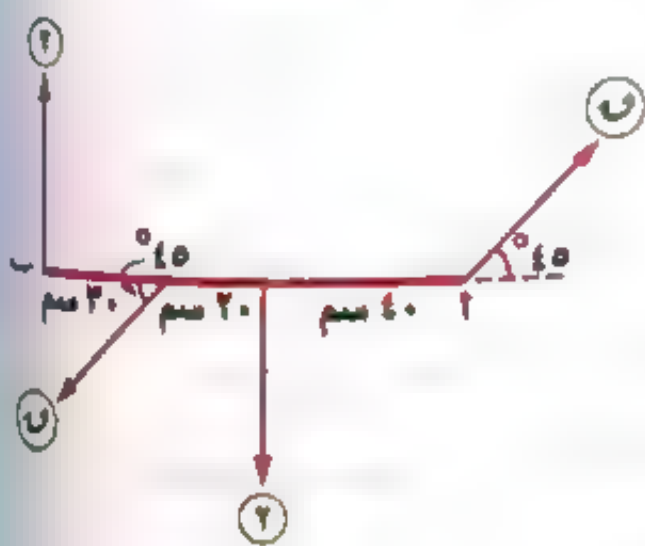
٩) القوى في كل شكل من الأشكال الآتية تعطى ازدواجات متكافئة ما عدا الشكل



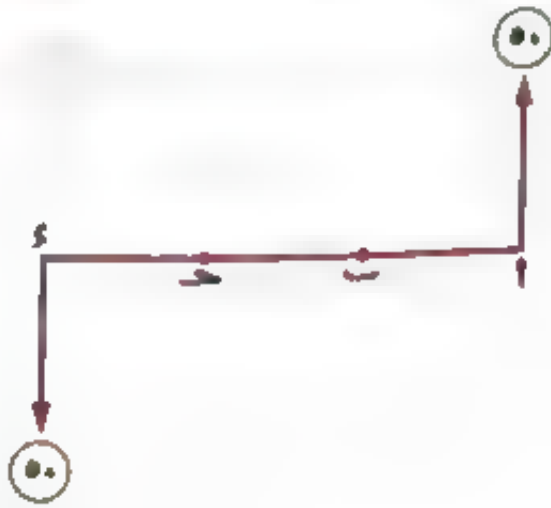
١٣) أثر ازدواجان مستويان في قضيب أ ب مهمل

الوزن طوله ٩٠ سم ، وكان الازدواج الأول يتكون من قوتين ٢ ، ٢ ث.كجم والثانى من قوتين ٢ ، ٢ ث.كجم وتؤثر عند النقط وفي الاتجاهات الموضحة في الشكل المقابل.

عُيِّن قيمة Δ التى تجعل الجسم يتزن تحت تأثير الازدواجين.



$$\Delta = \frac{2\sqrt{2}}{2} \text{ ث.كجم}$$



أ ب = ب ح = ح د = د سم ٦

قوتان مقدارهما ٥٠ ، ٥٠ ثقل جرام تؤثران في أ ، ب في اتجاه عمودي على \overrightarrow{AB} أوجد قوتين متساويتين تكونان ازدواجًا مكافئًا للازدواج المكون من القوتين المعطيتين بحيث :

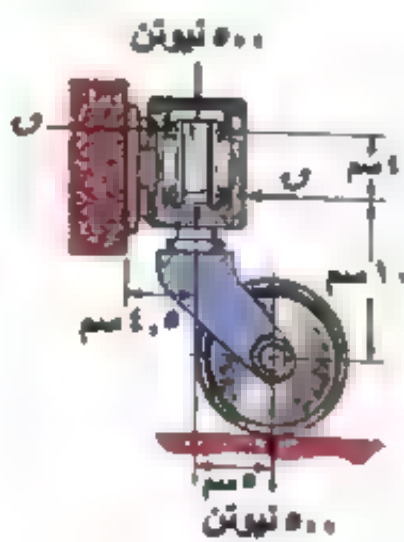
① تكونان عموديتين على \overrightarrow{AB} تؤثران في ب ، ح

② تصنع كل منهما زاوية قياسها ٦٠° مع \overrightarrow{AB} وتؤثران في ب ، ح

١٥٠ ، ١٥٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠ ثجم.

١٥ أ قضيب مهمل الوزن طوله ١,٥ متر تؤثر عند نقطتي تثليثه قوتان مقدار كل منهما ٢٠٠ نيوتن في اتجاهين متضادين وعمودياً على القضيب. رفعت القوتان وأثرت بدلاً منهما قوتان أخريان مقدار كل منهما ١٢٠ نيوتن عند طرفي القضيب بحيث تكونان ازدواجًا يكافئ للازدواج الأول. فما هو قياس زاوية ميل خط عمل كل من القوتين الجديدتين على القضيب ؟

٤٥° ٣٣°



عجلة كرسى تؤثر فيها

القوى الموضحة بالشكل

فإذا كانت العجلة متزنة.

أوجد قيمة : θ

٦٢٥ نيوتن

١٧ أ ب ح د ه و سداسي منتظم أثرت القوى ٢ ، ٩ ، ٩ ، ٣ ، ٩ ، ٣ ، ٩ ، ٣ في الاتجاهات أ ب ، ب ح ، ح د ، د ه ، ه و ، و أ على الترتيب. أوجد قيمة كل من θ ، ϕ لكي تتزن المجموعة.

١٢٠ نيوتن

١٣ **أ** قضيب منتظم طوله ٤٠ سم يتحرك في مستوٍ رأسي حول مفصل مثبت عند θ ، أثر على القضيب في نفس مستويه ازدواج معيار عزمه $\frac{3}{2} \times 10^3$ ثقل كجم. متر فدار القضيب حتى اتزن في وضع يميل فيه على الرأسى بزاوية قياسها 60° أوجد كلاً من وزن القضيب ورد فعل المفصل.

٦٠ ، ٦٠ ثقل كجم.

١٤ **أ** قضيب منتظم وزنه ٥ نيوتن يتحرك في مستوٍ رأسي حول مفصل ثابت عند طرفه θ ، أثر على القضيب في نفس مستويه ازدواج معيار عزمه ٥٠ نيوتن. سم فاتزن القضيب في وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها 60° أوجد طول القضيب وكذلك رد فعل المفصل في وضع الاتزان. ٤٠ سم ، ٥ نيوتن رأسيًا لأعلى.

١٥ **أ** قضيب منتظم طوله ٦٠ سم ووزنه ١٠ ثقل كجم يؤثر في منتصفه ويتحرك في مستوى رأسي حول مفصل ثابت عند طرفه θ ، أثر على القضيب ازدواج في مستوى رأسي. القياس الجبرى لعزمه ١٥٠ ث. كجم. سم برهن على أن رد فعل المفصل عند θ يساوى وزن القضيب وأوجد قياس زاوية ميل القضيب على الأفقى في وضع التوازن.

٦٠ ، ١٠ ث. كجم ، 60° .

١٦ **أ** قضيب طوله ٦٠ سم ووزنه ١٨ نيوتن يؤثر عند منتصفه. يمكن للقضيب الدوران بسهولة في مستوٍ رأسي حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير في القضيب عند النقطة θ التى تبعد ١٥ سم عن θ فإذا استند القضيب بطرفه θ على نضد أفقى أملس وشد الطرف θ أفقىً بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب. أوجد الشد في الحبل ورد فعل المسمار علماً بأن القضيب يتزن في وضع يميل فيه على الأفقى بزاوية قياسها 60° .

١٢ ، ١٢ ، ٣ نيوتن.

١٧ **أ** قضيب منتظم وزنه ٢ نيوتن وطوله متراً واحداً يمكنه الدوران بسهولة في مستوٍ رأسي حول مسمار أفقى مثبت بثقب صغير في القضيب عند نقطة عليه تبعد مسافة ٢٠ سم عن θ فإذا استند القضيب بطرفه θ على نضد أفقى أملس فأوجد رد فعل النضد. وإذا شد الطرف θ أفقىً بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساوياً لوزن القضيب فأوجد الشد في الحبل ورد فعل المسمار علماً بأن القضيب يميل على النضد بزاوية قياسها 45° .

٧٥ ، ٥ ، ٥ ، ٥ نيوتن.

٢٨ أ قضيب منتظم وزنه ٧٥ نيوتن وطوله ٨٠ سم يدور بسهولة حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة ح على القضيب حيث : ب ح = ٢٠ سم فإذا استند القضيب بطرفه أ على سطح أفقى أملس.

فأوجد مقدار واتجاه رد فعل كل من السطح الأفقى والمسمار على القضيب ، إذا شد الطرف ب بحبل حتى أصبح رد فعل المستوى يساوى وزن القضيب وكان القضيب يميل على الأفقى بزاوية ٣٠°

فأوجد الشد فى الحبل ومقدار واتجاه رد فعل المسمار إذا كان الحبل :

- ١ أفقياً.
- ٢ رأسياً.
- ٣ عمودياً على القضيب.

٢٩ أ ح صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع ارتفاعه ١٨ سم ووزنها ٢٠٠ جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث ، والصفيحة مثقوبة ثقباً صغيراً بالقرب من الرأس أ ومعلقة من هذا الثقب فى مسمار أفقى بحيث يكون مستواها رأسياً أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه ١٨٠٠ ثقل جرام . سم فى مستويها . أوجد قياس زاوية ميل أ ب على الأفقى فى وضع التوازن.

٣٠ أ ح صفيحة على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٢٤ سم ووزنها ٥٠٠ ثقل جرام ويؤثر عند نقطة تلاقى متوسطات المثلث والصفيحة معلقة فى مستو رأسى من ثقب صغير بالقرب من أ فإذا أثر على الصفيحة وفى مستويها ازدواج فالتزنت عندما كان الحرف أ ب أفقياً فأوجد معيار عزم هذا الازدواج .

٣١ أ ح صفيحة على شكل مثلث متساوى الساقين فيه : أ ب = أ ح = ١٣ سم ، ب ح = ١٠ سم تدور بسهولة فى مستو رأسى حول مفصل مثبت عند أ فإذا أثر على الصفيحة وفى مستويها ازدواج معيار عزمه ٨٠٠ ثقل جرام . سم فالتزنت فى وضع كان فيه أحد الساقين رأسياً . فأوجد وزن الصفيحة علماً بأنه يؤثر فى نقطة تلاقى متوسطات المثلث.

٢٦٠ ثقل جرام

١٢- أ- ح صفيحة على شكل مثلث قائم الزاوية في ب ، ب = ٩ سم ، ب ح = ١٢ سم ووزنها ٢٠٠ ثقل جم يؤثر في نقطة تقاطع متوسطات المثلث ، علقت من الرأس أ بحيث كان مستواها رأسيًا ، أوجد معيار عزم الازدواج الذي إذا أثر عليها في مستويها يجعل الحرف أ ب رأسيًا ، أوجد كذلك معيار عزم الازدواج الذي يجعل أ ب أفقيًا ، وإذا علقت الصفيحة من الرأس ح فكم يكون القياس الجبري لعزم الازدواج الذي يجعل ب ح رأسيًا ؟

٨٠٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٦٠٠ ثقل جم . سم .

١٣- (دور أول ٢٠٠٣) أ- ح صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٥٠ سم ووزنها ٣٠٠ ث . جرام يؤثر عند مركز المربع . علقت الصفيحة من ثقب صغير بالقرب من الرأس أ في مسمار أفقي بحيث يكون مستواها رأسيًا . أثر على الصفيحة في مستواها ازدواج القياس الجبري لعزمه ٧٥٠٠ ث . جم . سم أوجد قياس زاوية ميل القطر أ ح على الرأسى في وضع التوازن .

٤٥٠° ، ١٣٥° .

١٤- (١٩٩٢) صفيحة على شكل مربع أ ب ح د طول ضلعه ٨٠ سم ، وزنها ٢٥٠ ثقل جرام يؤثر في نقطة تلاقي القطرين . علقت الصفيحة من مسمار في ثقب صغير بالقرب من الرأس أ بحيث كان مستويها رأسيًا وأثر عليها ازدواج في مستويها فاترنت في وضع يميل فيه أ ح على الرأسى بزاوية قياسها ٣٠° عيّن معيار عزم الازدواج .

٥٠٠٠ ، ٢٧ ثقل جرام . سم .

١٥- أ- ح صفيحة رقيقة على هيئة مربع طول ضلعه ٢٠ سم ووزنها ١٥٠ نيوتن ويؤثر في نقطة تلاقي القطرين . علقت الصفيحة على مسمار أفقي رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د فاترنت في مستوي رأسي . أوجد الضغط على المسمار وإذا أثر على الصفيحة ازدواج اتجاهه عموديًا على مستويها فاترنت في وضع فيه أ د أفقي .

١٥٠٠ نيوتن ، ١٥٠٠ نيوتن . سم .

١٦- (دور أول ٢٠١٧) أ- ح صفيحة رقيقة على هيئة مستطيل فيه : ب = ١٨ سم ، ب ح = ٢٤ سم ووزنها ٢٠ نيوتن ويؤثر في نقطة تلاقي القطرين . علقت الصفيحة في مسمار أفقي رفيع من ثقب صغير بالقرب من الرأس د بحيث كان مستواها رأسيًا . فإذا أثر على الصفيحة ازدواج معيار عزمه يساوى ١٥٠ نيوتن . سم واتجاهه عمودي على مستوى الصفيحة فأوجد زاوية ميل د ب على الرأسى في وضع الاتزان .

٣٠° ، ١٥٠° .

مسائل نفيس مستويات علنا من التفكير

٣٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ إذا كونت القوتان $\vec{F}_1 = 2\vec{u}$ و $\vec{F}_2 = 3\vec{v}$ ، $\vec{F}_3 = 12\vec{u}$ (نيوتن ، \vec{u} و \vec{v} ازدواجاً

حيث $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ فإن : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \dots$

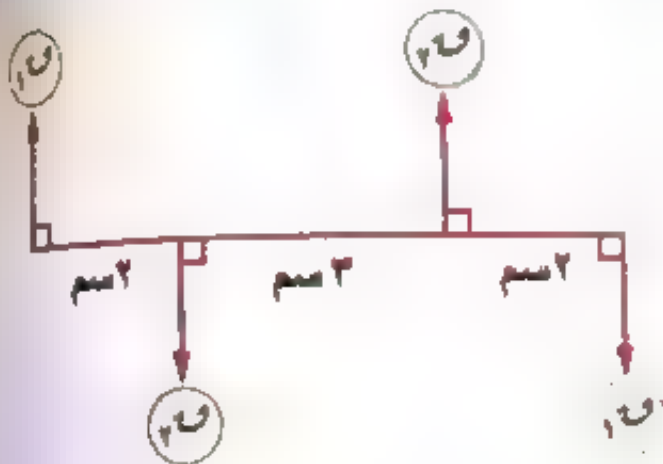
(١) $17\vec{u}$ ، $17\vec{v}$ (ب) $17\vec{u}$ ، $17\vec{v}$ (ج) $17\vec{u}$ ، $17\vec{v}$ (د) $17\vec{u}$ ، $17\vec{v}$

٢ ازدواج معيار عزمه (\vec{F}_1) فإذا تضاعف معيار كل من قوتيهِ ونقصت المسافة العمودية

بينهما بمقدار النصف كان معيار عزم الازدواج الجديد (\vec{F}_2) فإن :

(١) $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ (ب) $\vec{F}_1 = 2\vec{F}_2$ (ج) $\vec{F}_1 = 4\vec{F}_2$ (د) $\vec{F}_1 = 8\vec{F}_2$

٣ في الشكل المقابل :



إذا كانت المجموعة متزنة فإن :

(١) $10 < 20$

(ب) $10 > 20$

(ج) $10 = 20$

(د) $\frac{10}{2} = \frac{20}{3}$

٤ في الشكل المقابل :



إذا كانت المجموعة متزنة

فإن : (حيث θ زاوية حادة)

(١) $10 < 20$

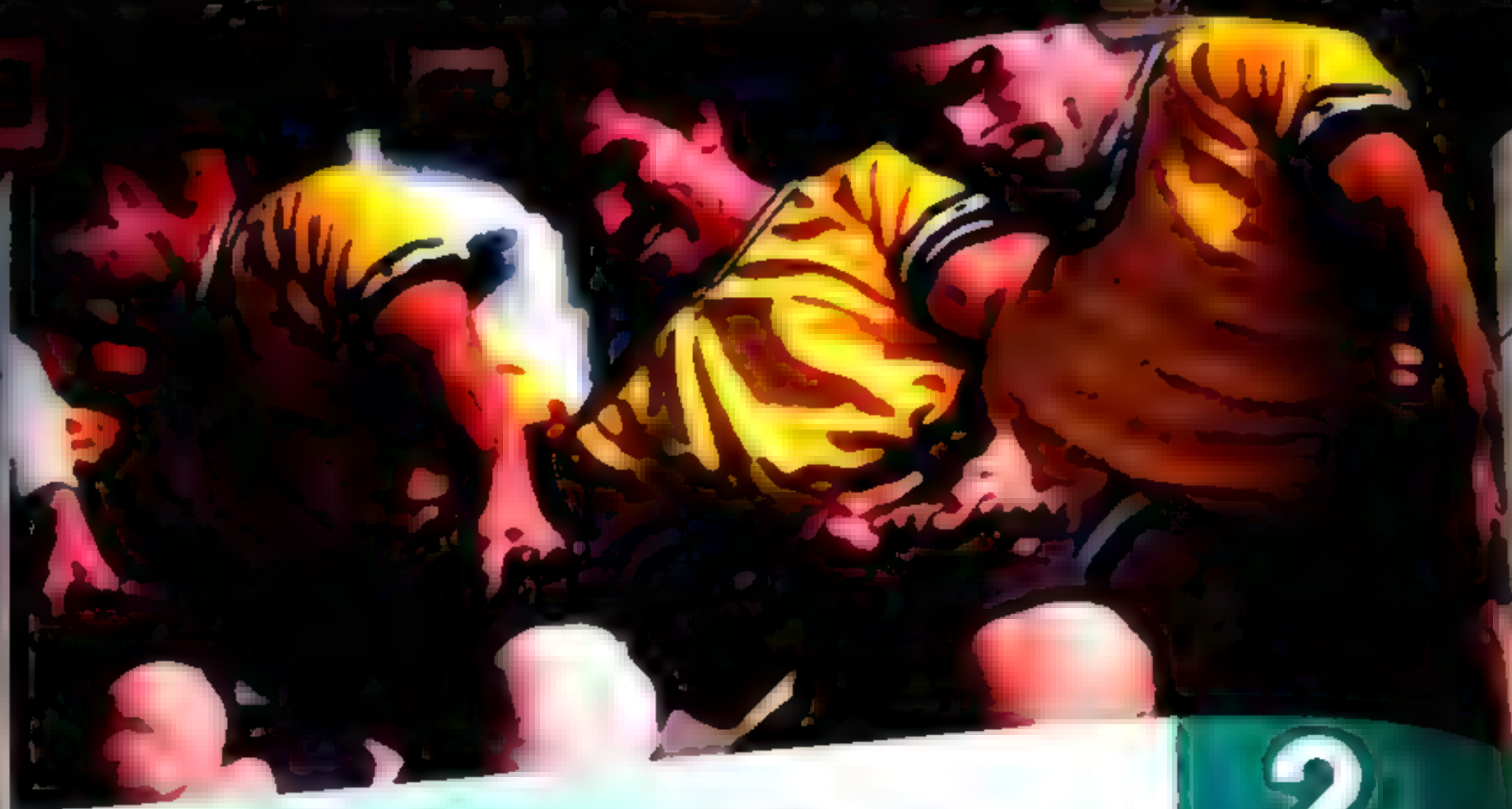
(ج) $10 = 20$

(ب) $10 > 20$

(د) $10 = 20$ ما θ

٣٨

١ ب قضيب منتظم وزنه (و) ثقل كجم يمكنه الدوران بسهولة في مستو رأسى حول مسمار أفقى ثابت يمر بثقب صغير فى القضيب عند نقطة تبعد عن ب بمقدار $\frac{1}{4}$ طول القضيب. فإذا استند القضيب بطرفه ١ على نضد أفقى أملس وشد الطرف ب أفقياً بحبل حتى أصبح رد فعل النضد مساوياً وزن القضيب فثبت أن الشد فى الحبل يساوى ٣ و طنا ه ثقل كجم حيث ه قياس زاوية ميل القضيب على النضد.



2

الازدواج المحصل

تعريف: مجموع ازدواجين مستويين

مجموع ازدواجين مستويين هو ازدواج واحد يسمى «الازدواج المحصل» عزمه يساوي مجموع عزمي هذين ازدواجين.

مثال: إذا كانت \vec{M}_1 و \vec{M}_2 تكونان ازدواجًا عزمه \vec{M} ، القوتان \vec{F}_1 و \vec{F}_2 تكونان زوج عزمه \vec{M} فإن $\vec{M} = (\text{عزم الازدواج المحصل}) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$

يمكن قياس جبري عزم مجموع ازدواجين مستويين = مجموع القياسين الجبريين لعزميهما

$$\text{مثال: } \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

تعميم

مجموع أي عدد محدود من الازدواجات المستوية هو ازدواج عزمه يساوي مجموع عزوم هذه الازدواجات.

$$\text{مثال: } \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n$$

يمكن قياس الجبري لعزم مجموع عدة ازدواجات مستوية = مجموع القياسات الجبرية لعزميهما.

$$\text{مثال: } \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \dots + \vec{M}_n$$

ملاحظة

• الأزواج \vec{F} يسمى الأزواج المحصل كما يقال إننا اختزلنا مجموعة الأزواج إلى أزواج واحد محصل.

• إذا كان \vec{F} (القياس الجبري لعزم مجموع عدة أزواج مستوية) = صفرًا فيقال حينئذٍ لمجموعة الأزواج إنها متوازنة.

مثال ١

أ ب ح د مربع طول ضلعه ٢٠ سم. أثرت قوى مقاديرها ٣٠ ، ٤٠ ، ٣٠ ، ٤٠ نيوتن في أ ب ، ح د ، ح د ، أ ب على الترتيب. كما أثرت في أ ، ح قوتان مقدار كل منهما $10\sqrt{2}$ نيوتن في اتجاهي ب د ، د ب على الترتيب. أوجد القياس الجبري لعزم الأزواج المحصل.

الحل

∴ طول ضلع المربع أ ب ح د = ٢٠ سم

∴ طول قطره = $20\sqrt{2}$ سم

∴ القوتين اللتين مقداراهما (٣٠ ، ٣٠) نيوتن

تكونان أزواجًا القياس الجبري لعزمه \vec{F}_1

∴ $\vec{F}_1 = 30 \times 20 = 600$ نيوتن سم

∴ القوتين اللتين مقداراهما (٤٠ ، ٤٠) نيوتن

تكونان أزواجًا القياس الجبري لعزمه \vec{F}_2

∴ $\vec{F}_2 = 40 \times 20 = 800$ نيوتن سم

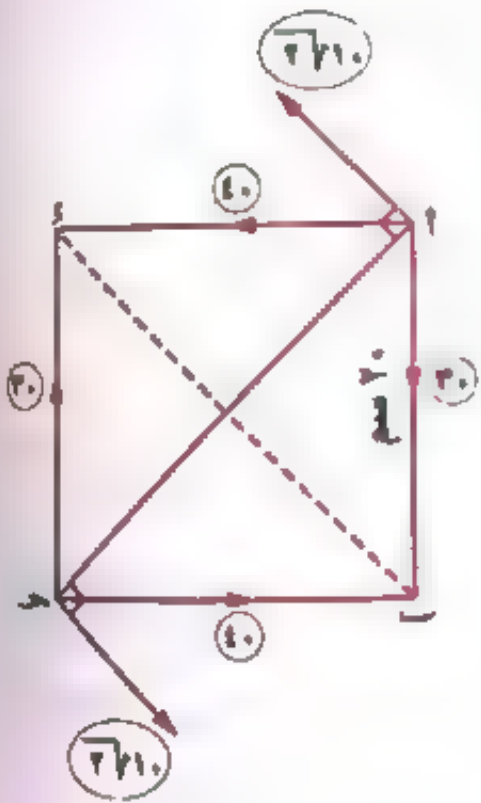
∴ القوتين اللتين مقداراهما ($10\sqrt{2}$ ، $10\sqrt{2}$) نيوتن

تكونان أزواجًا القياس الجبري لعزمه \vec{F}_3 :

∴ $\vec{F}_3 = 10\sqrt{2} \times 20\sqrt{2} = 400$ نيوتن سم

∴ المجموعة تكافئ أزواجًا القياس الجبري لعزمه \vec{F} :

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 600 + 800 + 400 = 1800$ نيوتن سم.

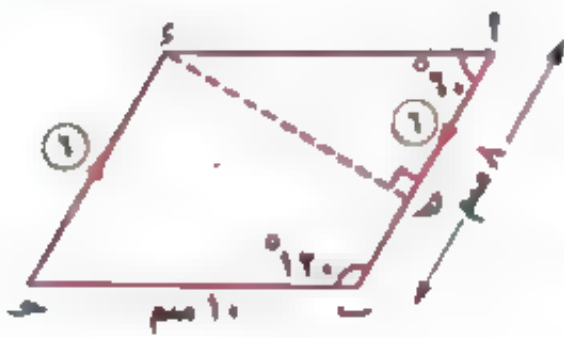


أب ح د متوازي أضلاع فيه : $أب = ٨$ سم ، $ب ح = ١٠$ سم ، $ق (د أ ب ح) = ١٢٠^\circ$
 أثبت قوتان مقدار كل منهما ٦ ثقل كجم في $أ ب$ ، $ح د$ كما أثر ازدواج متجه عزمه عمودى
 على المستوى $أ ب ح د$ ومعيار عزمه $٢٠ \sqrt{٣}$ ثقل كجم سم
 فأوجد القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل إذا كان :

١) اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين
 ٦ ، ٦ ثقل كجم.

٢) اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى فى اتجاه مضاد لاتجاه متجه عزم الازدواج المكون من
 القوتين ٦ ، ٦ ثقل كجم.

الحل



نرسم $هـ د \perp أ ب$ فيكون :

$$هـ د = ٨ \sin ٦٠^\circ = ٦ \text{ سم} \quad ١٠ \cos ٦٠^\circ = ٥ \text{ سم}$$

∴ ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين

$$٦ ، ٦ \text{ ثقل كجم}) = -٦ \times ٥ = -٣٠ \sqrt{٣} \text{ ثقل كجم. سم}$$

١) إذا كان متجه عزم الازدواج المعطى فى نفس اتجاه متجه عزم الازدواج ج

كان ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى) = $-٣٠ \sqrt{٣}$ ثقل كجم. سم

$$\therefore \text{ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل)} = \text{ج} + \text{ج} = -٣٠ \sqrt{٣} - ٣٠ \sqrt{٣} = -٦٠ \sqrt{٣} \text{ ثقل كجم. سم}$$

$$= -٦٠ \sqrt{٣} \text{ ثقل كجم. سم}$$

٢) إذا كان متجه عزم الازدواج المعطى فى اتجاه مضاد لعزم الازدواج ج

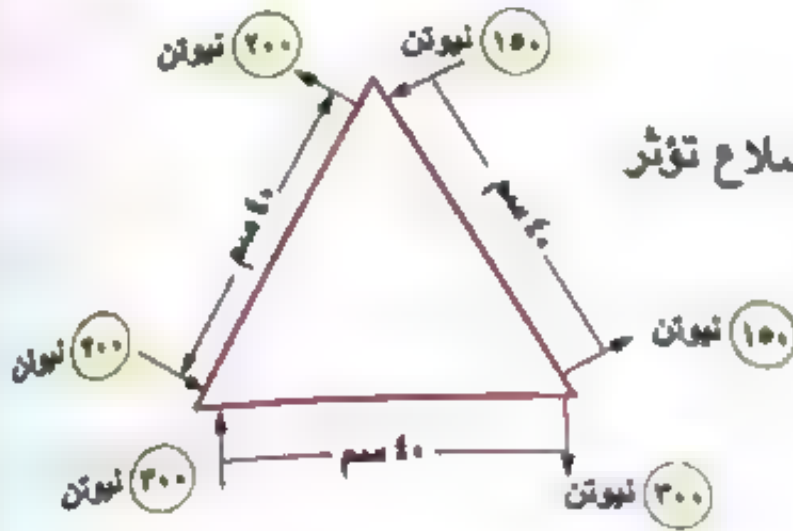
كان ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج المعطى) = $٣٠ \sqrt{٣}$

$$\therefore \text{ج (القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل)} = \text{ج} + \text{ج} = ٣٠ \sqrt{٣} + ٣٠ \sqrt{٣} = ٦٠ \sqrt{٣} \text{ ثقل كجم. سم}$$

$$= ٦٠ \sqrt{٣} \text{ ثقل كجم. سم}$$

مثال ٣

الشكل المقابل :



يمثل صفيحة منتظمة على شكل مثلث متساوي الأضلاع تؤثر عليها القوى عمودياً على الأضلاع كما بالشكل. أوجد القياس الجبري لعزم الأزواج المحصل.

الحل

∴ القوتين اللتين مقداراهما (200 ، 200) نيوتن تكونان ازدواجاً القياس الجبري لعزمه ج.

$$\therefore ج = 200 \times 40 = 8000 \text{ نيوتن.سم}$$

، القوتين اللتين مقداراهما (150 ، 150) نيوتن تكونان ازدواجاً القياس الجبري لعزمه ج.

$$\therefore ج = 150 \times 40 = 6000 \text{ نيوتن.سم}$$

، القوتين اللتين مقداراهما (200 ، 200) نيوتن تكونان ازدواجاً القياس الجبري لعزمه ج.

$$\therefore ج = 200 \times 40 = 8000 \text{ نيوتن.سم}$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبري لعزمه ج حيث :

$$ج = ج + ج + ج = 8000 + 6000 + 8000 = 22000 \text{ نيوتن.سم}$$

مثال ٤

أحدهم سداسي منتظم طول ضلعه 8 سم أثرت قوى مقاديرها 200 ، 150 ، 200 ، 150 ، 200 ، 150 ثقل جرام في ب ح د ه و أ على الترتيب أوجد : ١) القياس الجبري لعزم الأزواج الذي يكافئ المجموعة.

٢) مقدار واتجاه قوتين تعملان في أ ب ، د ه لتصبح المجموعة متزنة.

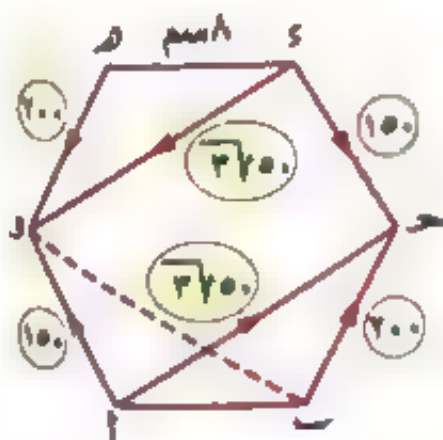
الحل

∴ طول ضلع السداسي (ل) = 8 سم

$$\therefore أ = ب = د = ه = و = ز = 200 \times 8 = 1600 \text{ ثقل ج.سم}$$

١) (القياس الجبري لعزم الأزواج الذي قوته 200 ، 200 ثقل جرام)

$$= 200 \times 8 \times \sqrt{3} = 1600 \sqrt{3} \text{ ثقل ج.سم}$$

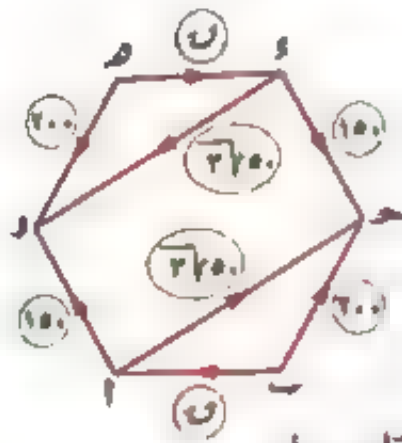


ج_١ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه ١٥٠ ، ١٥٠ ثقل جرام)
 $150 \times 8 = 1200 = 32 \times 37.5$ ثقل جم. سم

ج_٢ (القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى قوتاه ٣٢٥٠ ، ٣٢٥٠ ثقل جرام)
 $3250 \times 8 = 26000 = 8 \times 3250 = 1 \times 3250$ ثقل جم. سم

① ج (القياس الجبرى لمجموع عزوم الازدواجات) = ج_١ + ج_٢ + ج_٣
 $1600 = 3250 + 1200 - 32 \times 800 = 3250 + 1200 - 25600$ ثقل جم. سم

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة = ٣٢٨٠٠ ثقل جم. سم.



② لى تتزن المجموعة يجب أن تكون القوتان اللتان تعملان فى

أ ب ، هـ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه يساوى

٣٢٨٠٠ ثقل جم. سم

∴ يجب أن تؤثر إحدى القوتين فى اتجاه ب أ والآخرى فى

اتجاه هـ (كما فى الشكل) وبفرض أن مقدار كل من القوتين = ثقل جرام

∴ القياس الجبرى لعزم الازدواج المكون من القوتين الذى مقدارهما (٣ ، ٣) = ٣٨ - ٣٢

∴ ٣٨ - ٣٢ = ٦ = ١٠٠ ثقل جرام.

نظام القوى المستوية الذى يكافئ ازدواجاً

يقال لعدة قوى مستوية $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ إنها تكافئ ازدواجاً إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً :

① انعدام محصلة القوى (أو مجموع المركبات الجبرية للقوى فى أى اتجاه = صفر).

② مجموع عزوم القوى حول أى نقطة لا ينعدم.

ملاحظة

إذا كانت محصلة عدة قوى = صفر فإن القوى إما متزنة أو تكافئ ازدواجاً وبالتالي يكون :

• إذا كان $\vec{F} = \vec{G}$ ، $\vec{F} = \vec{G}$ فإن القوى متزنة.

• إذا كان $\vec{F} = \vec{G}$ ، $\vec{F} \neq \vec{G}$ فإن القوى تكافئ ازدواجاً.

مثال 5

تؤثر القوى $\vec{P}_1 = 4\vec{s} + 2\vec{v}$ ، $\vec{P}_2 = 2\vec{s} - 2\vec{v}$ ، $\vec{P}_3 = -6\vec{s} + \vec{v}$ في النقطة 1 = (2, 2) ، 2 = (-2, 3) ، 3 = (4, -6) على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

الحل

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = 4\vec{s} + 2\vec{v} + 2\vec{s} - 2\vec{v} - 6\vec{s} + \vec{v} = \vec{0}$$

لاحظ أنه

يمكننا أخذ العزم حول أي نقطة اختيارية أخرى ولتكن 1 أو 2 ونجد أن :

$$E_1 = E_2 = E_3 = 40$$

∴ إما أن تكون مجموعة القوى متزنة

أو تكافئ ازدواجًا

$$\vec{E}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{P}_3$$

$$\text{حيث : } \vec{r}_1 = (2\vec{s} + 2\vec{v}) - (4\vec{s} - 6\vec{v}) = -2\vec{s} + 8\vec{v}$$

$$= -2\vec{s} + 8\vec{v}$$

$$\vec{r}_2 = (-2\vec{s} + 3\vec{v}) - (2\vec{s} - 2\vec{v}) = -4\vec{s} + 5\vec{v}$$

$$\vec{r}_3 = (4\vec{s} - 6\vec{v}) - (2\vec{s} + 2\vec{v}) = 2\vec{s} - 8\vec{v}$$

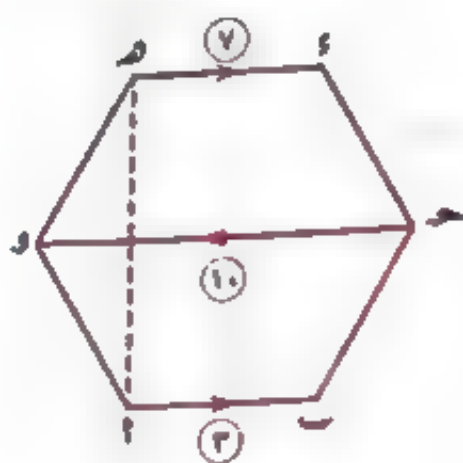
$$+ (-2\vec{s} + 8\vec{v}) \times (-4\vec{s} + 5\vec{v}) + (2\vec{s} - 8\vec{v}) \times (-2\vec{s} + 8\vec{v}) =$$

$$= (36 - 4) + (18 - 18) = 32 \quad (\text{لا يساوي } 0)$$

∴ القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه = 40 وحدة عزم.

مثال 6

أب ح د ه و سداسي منتظم طول ضلعه ١٢ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٧ ، ١٠ ثقل جرام في أ ب ، ه د ، ح و على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه ثم أوجد مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران عند ح ، و عموديتين على ح و لكي تتزن المجموعة.



∴ طول الضلع (ل) = ١٢ سم

$$\therefore 12\sqrt{3} = 21\sqrt{3} = 21$$

$$\text{حـ} = 2\sqrt{3} = 24 \text{ سم}$$

وبفرض أن \vec{u} متجه وحدة في اتجاه \vec{AB}

$$\therefore \vec{R} (\text{محصلة القوى}) = \vec{u} \cdot 2 + \vec{u} \cdot 7 - \vec{u} \cdot 10 = \vec{u} \cdot 9$$

$$\therefore \text{حـ} = 9 = 2 \times \frac{1}{2} \times 21 - 7 \times \frac{1}{2} \times 21 = 21 - 73.5 = -52.5$$

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه $24\sqrt{3}$ ثقل. جم. سم

∴ المجموعة تكافئ ازدواجًا

∴ لكي تتزن المجموعة لابد من وجود ازدواج آخر

$$\text{قياسه الجبري} = 24\sqrt{3} \text{ ثقل جم. سم}$$

∴ القوتان المؤثرتان عند حـ ، و عموديتان على حـ و هما \vec{u}

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 24 \times 24 = 576$$

$$\therefore \vec{u} = 24\sqrt{3} \text{ ثقل جم}$$

∴ مقدار كل من القوتين اللتين تؤثران عند حـ ، و عموديتين على حـ و لكي تتزن المجموعة هما

$$24\sqrt{3} \text{ ثقل جم ، } 24\sqrt{3} \text{ ثقل جم.}$$

حل آخر:

* نحل القوة ١٠ ثقل جرام المؤثرة في حـ و إلى قوتين ٧ ثقل جم ، ٣ ثقل جم في اتجاه حـ و

فتكون القوتان ٧ ثقل جم في حـ و ، ٧ ثقل جم في حـ و تكافئان

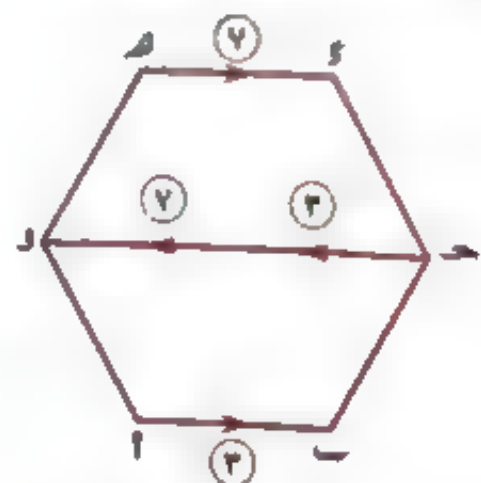
$$\text{ازدواجًا قياسه الجبري} = 21\sqrt{3} \times 7 - 42\sqrt{3} = 147\sqrt{3} - 42\sqrt{3} = 105\sqrt{3}$$

، القوتان ٣ ثقل جم في حـ و ، ٣ ثقل جم في حـ و

تكافئان ازدواجًا قياسه الجبري

$$= 21\sqrt{3} \times 3 = 63\sqrt{3}$$

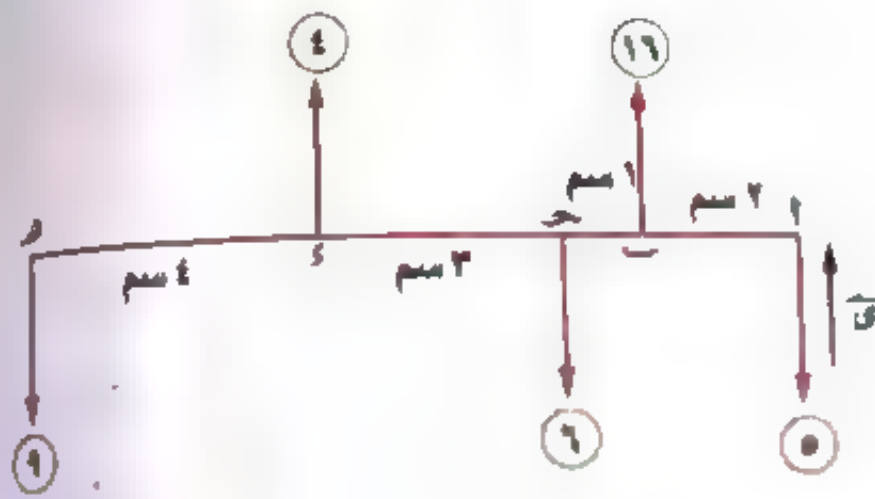
$$\therefore \text{المجموعة تكافئ ازدواجًا واحدًا قياسه الجبري} = 105\sqrt{3} + 63\sqrt{3} = 168\sqrt{3} \text{ ثقل جم. سم.}$$



مثال ٧

أ، ب، ج، د، هـ خمس نقاط على مستقيم أفقي واحد حيث :
 أ ب = ٢ سم ، ب ج = ١ سم ، ج د = ٤ سم ، د هـ = ٤ سم. أثرت في
 أ، ج، د قوى مقاديرها ٥، ٦، ٩ ثقل جم رأسياً إلى أسفل ، كما أثرت في ب، هـ
 قوتان مقدارهما ١٦، ٤ ثقل جرام رأسياً إلى أعلى.
 أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد عزمه.

الحل



بفرض أن \vec{C} متجه وحدة في الاتجاه

الرأسي إلى أعلى

$$\therefore \vec{C} = \vec{16} + \vec{4} - \vec{5} - \vec{6} - \vec{9}$$

$$\therefore \vec{C} = \vec{0}$$

(١)

، القياس الجبري لمجموع عزوم القوى حول أ (ج)

$$6 \times 4 - 2 \times 16 - 10 \times 9 + 2 \times 6 =$$

$$= 24 - 32 - 90 + 18 = 52 \text{ ثقل جم. سم}$$

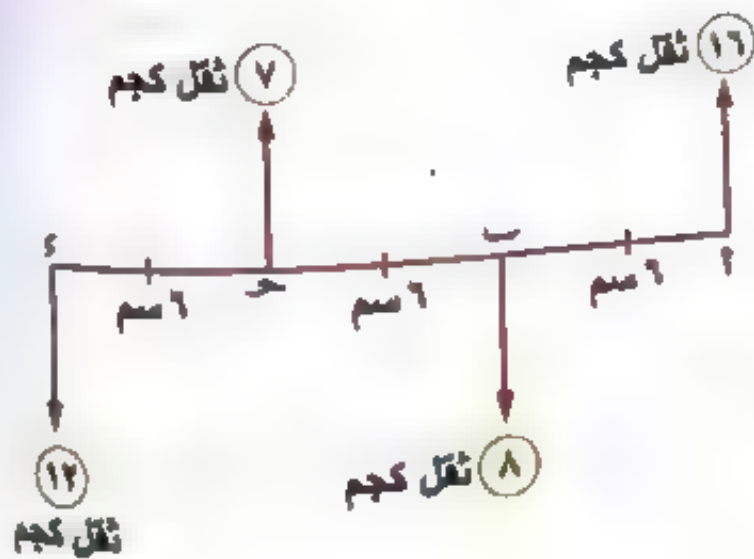
$$\therefore \vec{C} = 52 \text{ ثقل جم. سم}$$

(٢)

من (١)، (٢) ينتج أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً معيار عزمه ٥٢ ثقل جم. سم ويعمل على الدوران في اتجاه عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

مثال ٨

في الشكل المقابل :



$$أ ب = ٦ سم ، ب ج = ٦ سم ، ج د = ٦ سم ، د هـ = ٦ سم$$

أوجد قوة \vec{C} بحيث تؤل القوى الخمس إلى ازدواج
 القياس الجبري لعزمه ١٦٢ ثقل كجم. سم.

نفس أن \vec{F} متجه وحدة قوة في الاتجاه الرأسى إلى أعلى
مجموعة القوى الخمس تكافئ ازدواج $\vec{F} = \vec{H} \therefore$

$$\vec{F} = \vec{H} \therefore \vec{F} = \vec{H} + \vec{H} + \vec{H} + \vec{H} + \vec{H} \therefore \vec{F} = 5\vec{H}$$

\vec{F} مقدارها ٢ ثقل كجم واتجاهها رأسى إلى أسفل

\therefore القياس الجبرى لعزم الازدواج الذى يكافئ المجموعة = ١٦٢ ثقل كجم. سم

$$162 = 16 \times 10 + 6 \times 8 + 12 \times 7 - 18 \times 12 + 12 \times 7 + 12 \times 7 \therefore$$

حيث \vec{H} هو القياس الجبرى لعزم القوى \vec{F} بالنسبة للنقطة A

$$162 = 16 \times 10 + 6 \times 8 + 12 \times 7 - 18 \times 12 + 12 \times 7 + 12 \times 7 \therefore \vec{H} = -18 \text{ ثقل كجم. سم}$$

\therefore القياس الجبرى لعزم القوة \vec{F} بالنسبة للنقطة A سالب ، واتجاه \vec{F} إلى أسفل

\therefore خط عمل \vec{F} يقطع AE فى

نقطة H (مثلاً) حيث $H \neq E$

$$18 = 2 \times H \therefore H = 9$$

$$\therefore H = 6 \text{ سم.}$$



قاعدة هامة

إذا أثرت ثلاث قوى مستوية وغير متلاقية فى نقطة فى جسم متماسك ومثلها تمثيلاً تاماً أضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً معيار عزمه يساوى ضعف مساحة سطح المثلث $\times M$ حيث M ثابت يساوى $\frac{\text{مقدار القوة}}{\text{طول الضلع المثل لها}}$



أى أن: إذا كانت $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ ثلاث قوى يمثلها

تمثيلاً تاماً أضلاع المثلث ABC

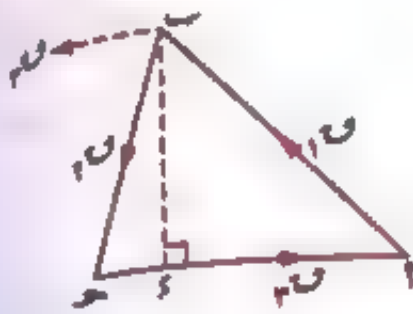
$$\text{وكان: } \frac{1}{AB} = \frac{2}{BC} = \frac{3}{CA} = M \text{ حيث } M \text{ مقدار ثابت}$$

ومأخوذة فى اتجاه دورى واحد ABC, BCA, CAB على الترتيب

فإن مجموعة القوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ تكافئ ازدواجاً معيار عزمه

$$= 2 \times \text{مساحة سطح } \triangle ABC \times M$$

البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)



نفرض أن : \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} تمثل تمثيلاً تاماً للقوى

\vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب بمقياس رسم :

كل ١ وحدة طول تمثل م وحدة من وحدات مقادير القوى

$$\vec{a} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad \therefore \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

أي أن : محصلة القوتين \vec{b} ، \vec{c} هي قوة تساوي $(-\vec{a})$

لكننا نعلم أن خط عمل محصلة قوتين متلاقيتين في نقطة يمر بنفس هذه النقطة

\therefore خط عمل القوة $(-\vec{a})$ وهي محصلة \vec{b} ، \vec{c} يمر بالنقطة ب

\therefore القوى الثلاث \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} اختزلت إلى قوتين متوازيتين \vec{a} و $(-\vec{a})$ وتعمل في ح \vec{a}

$(-\vec{a})$ وتعمل عند ب

\therefore مجموعة القوى الثلاث تكافئ ازدواج

ويكون معيار عزم الازدواج $\|\vec{a}\| \cdot s$ ، حيث (س) البعد العمودي بين خطي عمل قوتي الازدواج) ولكن $\|\vec{a}\| = a$ ، \therefore معيار عزم الازدواج $= a \times s$

$$\therefore \text{معيار عزم الازدواج} = a \times s = s \times a = s \times (a \times s) \times 2$$

$$= \text{ضعف مساحة سطح } \Delta \text{ ب } a \times s \times 2$$

(وهو المطلوب)

مثال ٩

أ ب ح مثلث فيه : $a = 7$ سم ، $b = 8$ سم ، $c = 12$ سم ، أثرت قوى مقاديرها ١٧.٥ ، ٢٠ ، ٢٢.٥ نيوتن في أ ، ب ، ح على الترتيب. بين أن مجموعة هذه القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه.

الحل

نحسب طول أ ح حيث من دراستنا لحساب المثلثات نعلم أن :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad 7^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \times 8 \times 12 \cos A$$

$$49 = 64 + 144 - 192 \cos A \quad 192 \cos A = 149 \quad \cos A = \frac{149}{192}$$

$$\therefore A = 36^\circ$$



$$\therefore \vec{c} = \vec{a} = \vec{b} = 12 \text{ سم}$$

$$\frac{0}{4} = \frac{22.5}{12} , \quad \frac{0}{4} = \frac{20}{8} , \quad \frac{0}{4} = \frac{17.5}{7}$$

القوى الثلاثة ممثلة تمثيلاً تاماً بأضلاع المثلث $\triangle ABC$ في اتجاه دورى واحد

\therefore مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً معيار عزمه = ضعف مساحة سطح $\triangle ABC \times M$

$$\therefore \text{مساحة سطح } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \sin 120^\circ = 14\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{مجموعة القوى تكافئ ازدواج معيار عزمه} = \frac{0}{4} \times 14\sqrt{3} \times 2 = 70\sqrt{3} \text{ نيوتن.سم.}$$

مثال ١٠

ثلاث قوى مقاديرها ٢٥ ، ٢٠ ، ٢٥ نيوتن يمثلها تمثيلاً تاماً القطع المستقيمة الموجهة \vec{AB} ، \vec{BC} ، \vec{CA} على الترتيب من $\triangle ABC$ الذى فيه : $\vec{b} = ٤٥$ سم

أوجد معيار عزم الازدواج الذى يكافئ القوى الثلاث.

الحل

$\therefore \vec{b}$ يمثل ٢٠ نيوتن أى أن ٤٥ سم تمثل ٢٠ نيوتن

$\therefore M$ (عدد وحدات القوة التى تمثلها وحدة الطول)

$$\frac{20}{45} = \frac{2}{9} \text{ نيوتن / سم}$$

$$\therefore \vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = 27.5 = \frac{2}{9} \div 25 = 27.5 \text{ سم}$$

نرسم $\vec{a} \perp \vec{b}$ فى \vec{c} فىكون $\vec{c} = \frac{1}{2} \vec{b} = 22.5$ سم ويكون :

$$\vec{a} = \sqrt{(27.5)^2 - (22.5)^2} = 20 \text{ سم}$$

\therefore معيار عزم الازدواج = ضعف مساحة سطح $\triangle ABC \times M$

$$= \frac{2}{9} \times 20 \times 45 = 200 \text{ نيوتن.سم}$$

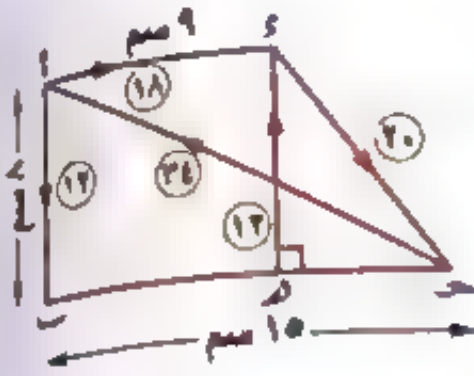
مثال ١١

\vec{AB} شبه منحرف فيه : $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ، \vec{a} عمودى عليهما ، \vec{c} مسقطى على \vec{b}

$\vec{a} = 15$ سم ، $\vec{b} = 8$ سم ، $\vec{c} = 9$ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢ ، ١٨ ، ٢٠ ، ٢٤ نيوتن فى \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} على الترتيب.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد قياسه الجبرى.

الحل



واضح أن $B = 9$ سم

$\therefore H = 6$ سم

$\therefore E = \sqrt{36 + 64} = 10$ سم

$H = 9 = \sqrt{(10)^2 + (8)^2} = 17$ سم

القوتان 12 في H ، 12 في A تكونان ازدواجًا

والقياس الجبرى لعزمه $10.8 = 9 \times 12 = 108$ نيوتن.سم.

(1)

، القوى 18 ، 20 ، 24 نيوتن في ترتيب دورى واحد في ΔE حيث :

$$2 = \frac{24}{17} = \frac{20}{10} = \frac{18}{9}$$

\therefore هذه المجموعة تكون ازدواجًا القياس الجبرى لعزمه $= 2$ مساحة ΔE 2×2

ولكن مساحة سطح $\Delta E = \frac{1}{2} \times 9 \times 8 = 36$

\therefore القياس الجبرى لعزم هذا الازدواج $= 2 \times 36 \times 2 = 144$ نيوتن.سم.

(2)

من (1) ، (2) :

\therefore المجموعة تكافئ ازدواجًا واحدًا قياسه الجبرى $= 10.8 + 144 = 154.8$ نيوتن.سم.

مثال ١٢

أب ح د هـ و سداسى منتظم طول ضلعه 14 سم أثرت قوى مقاديرها 6 ، 6 ، 8 ، 6 ، 8 ، 2 في A ، B ، C ، D ، E ، F على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه.

الحل

القوتان 8 ثقل جرام في C ، 8 ثقل جرام في E تكونان ازدواجًا

القياس الجبرى لعزمه $= 8 \times 7 = 56$ ثقل جم.سم

(1)

، القوى 6 ، 6 ، 2 ثقل جرام تؤثر في أضلاع المثلث ABC وفي ترتيب دورى واحد كما أن :


$$2 = \text{مساحة سطح } \Delta \text{ ا ب ح } \times \frac{2}{V}$$

القياس الجبري لعزم هذا الازدواج $= 2 \times 49 \times \sqrt{3} \times \frac{2}{V}$

(7)

من (۱) ، (۲) :

(1)

∴ معيار عزم الازدواج = $14 \sqrt{3}$ ثقل جم. سم.

(7)

۲۷

()

:



الحل

()

:

:

:

سریں ص = $\sqrt{9+16}$ = 5 سم ، ص ب = 5 سم

ب ح = ١٠ سم (معطى) ، ح س = $\sqrt{٢٤ + ٣٦} = ١٠$ سم
 ∴ مقادير القوى على الترتيب هي ٥ ل ، ٥ ل ، ١٠ ل ، ١٠ ل حيث ل مقدار ثابت
 ، ∴ مساحة الشكل ح س ب

= مساحة المستطيل - (مجموع مساحتي المثلثين أ س ص ، س و ح)

$$= ٨٠ - (٢٤ + ٣٦) = ٢٠ \text{ سم}^2$$

، ∴ معيار عزم الازدواج = ٢ مساحة الشكل ح س ب \times ل

$$\therefore ٢٠ \times ٢ = ٤٠ \text{ ل} \quad \therefore ٤٠ = ٢ \times ٢٠$$

∴ مقادير القوى هي : ٢٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٤٠ نيوتن على الترتيب.

قاعدة

إذا كان مجموع القياسات الجبرية لعزوم مجموعة من القوى المستوية بالنسبة لثلاث نقط في مستواها ليست على استقامة واحدة يساوى مقدار ثابتاً (لا يساوى الصفر) كانت هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

أى أن : إذا كانت : أ ، ب ، ح ثلاث نقط في مستوى القوى وليست على استقامة واحدة وكان $ع_أ = ع_ب = ع_ح =$ مقدار ثابت (لا يساوى الصفر) فإن مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه يساوى هذا المقدار الثابت.

البرهان : (لا يمتحن فيه الطالب)

بفرض أن النقط الثلاث هي : أ ، ب ، ح

$$، \therefore ع_أ = ع_ب = ع_ح = \text{مقدار ثابت (لا يساوى الصفر)}$$

∴ لا يمكن أن تكون مجموعة القوى متوازنة إذ أن مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى لا تتعدم ∴ مجموعة القوى إما أنها تكافئ قوة أو تكافئ ازدواجاً

وبفرض أن المجموعة تكافئ قوة مقدارها ق وأن النقط الثلاث على أبعاد $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ من خط عمل هذه القوة على الترتيب.

$$\therefore ق \times ل_١ = ق \times ل_٢ = ق \times ل_٣ = \text{مقدار ثابت}$$

وبالقسمة على ق حيث $ق \neq ٠$

$$\therefore ل_١ = ل_٢ = ل_٣$$



أي أن: النقط ١، ٢، ٣، ٤ تقع على مستقيم واحد يوازي خط عمل \vec{W}

وهذا يتنافى مع الفرض (حيث إن ١، ٢، ٣، ٤ ليست على استقامة واحدة)
 \therefore فرض أن مجموعة القوى تكافئ قوة لا يمكن أن يتحقق.

\therefore مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً القياس الجبري لعزمه يساوي المقدار الثابت.

* لاحظ أن: إذا كان المقدار الثابت يساوي صفراً فإن مجموعة القوى تكون متزنة.

مثال ١٤

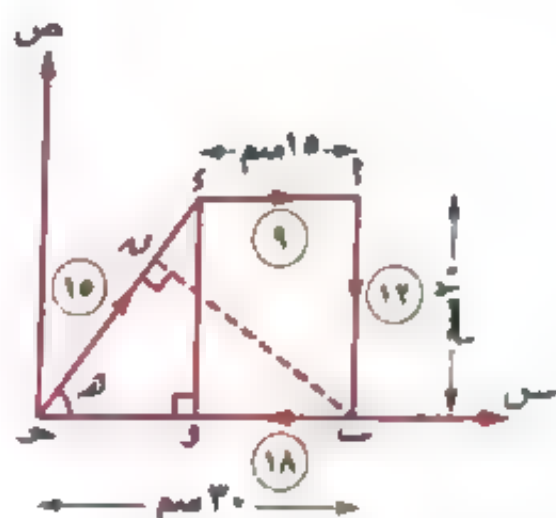
أحد شبه منحرف قائم الزاوية عند B ، $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، $AB = 20$ سم

$BC = 20$ سم، $AD = 10$ سم أثرت قوى مقاديرها ١٢، ١٨، ١٥، ٩ نيوتن في A ، B ، C ، D على الترتيب.

لثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً، أوجد معيار عزمه.

الحل

نرسم $\vec{W} \perp \overline{BC}$



$\therefore B = 10$ سم، $W = 10 - 20 = 10$ سم

\therefore من ΔBOW القائم الزاوية في O يكون

$$W = \sqrt{(10)^2 + (20)^2} = 22.36 \text{ سم}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{10}{22.36} = 0.4472, \cos \theta = \frac{20}{22.36} = 0.8944$$

بأخذ \vec{W} ، \vec{W} اتجاهين متعامدين كما في الرسم

نفرض أن \vec{S} ، \vec{W} متجهها وحدة القوة في اتجاهي \vec{W} ، \vec{W} ويفرض أن القوى في \vec{W} ، \vec{W} ، \vec{W} ، \vec{W} $\therefore \vec{W} = 12 - 18 + 9 = 3$ سم، $\vec{W} = 15 - 9 = 6$ سم

$$\vec{W} = 15 \cos \theta + 15 \sin \theta = 15 \times 0.8944 + 15 \times 0.4472 = 22.36 \text{ سم}$$

$$9 + 12 = 21$$

$$\therefore \vec{W} = 12 - 18 + 9 + 12 = 15 \text{ سم}$$

١٤ (القياس الجبري لمجموع العزوم بالنسبة للنقطة H)

$$12 - 18 + 9 - 15 = -3 \text{ نيوتن.سم}$$

، $\therefore \vec{C} = \vec{A}$ ، $\vec{C} = 540 \text{ نيوتن.سم}$

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا معيار عزمه 540 نيوتن.سم ويعمل على الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة.

حل آخر:

جـ (القياس الجبري لمجموع العزوم حول ح) = 540 نيوتن.سم (من الحل السابق)

، جـ (القياس الجبري لمجموع العزوم حول د)

$$= 12 \times 15 - 18 \times 20 = 360 - 360 = 0 \text{ نيوتن.سم}$$

، جـ (القياس الجبري لمجموع العزوم حول ب)

$$= 9 \times 20 - 18 \times 15 = 180 - 270 = -90 \text{ نيوتن.سم}$$

$$= 180 - 180 = 0 \text{ نيوتن.سم}$$

، $\therefore \vec{C} = \vec{A} = \vec{B} = 540 \text{ نيوتن.سم والنقط ب ، ح ، د ليست على استقامة واحدة}$

∴ مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا القياس الجبري لعزمه 540 نيوتن.سم

حل ثالث:

∴ القوى 12 ، 18 ، 15 ، 9 نيوتن في ترتيب دوري واحد

$$\therefore \frac{12}{2} = \frac{18}{3} = \frac{15}{4} = \frac{9}{1} = \frac{3}{0}$$

∴ هذه المجموعة تكافئ ازدواجًا القياس الجبري لعزمه $= 2 \times \text{مساحة شبه المنحرف} \times \frac{3}{0}$

$$= 2 \times \frac{15 + 20}{2} \times \frac{3}{0} =$$

$$= 540 \text{ نيوتن.سم}$$

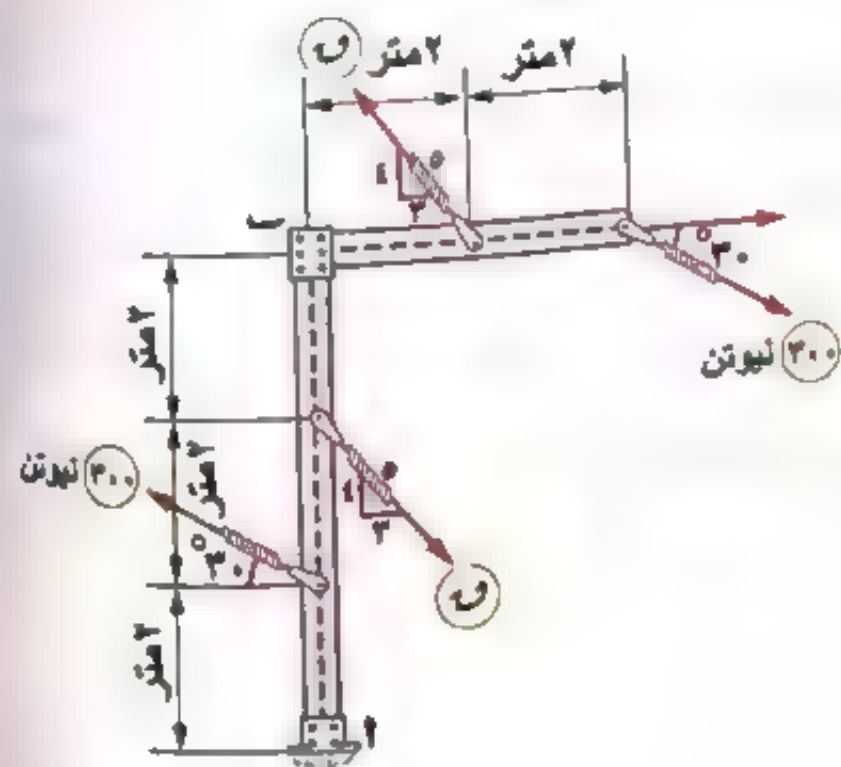
مثال ١٥

في الشكل المقابل:

أوجد \vec{C} التي تجعل القياس الجبري

لعزم الازدواج المحصل

يساوي 100 - 360 نيوتن.متر.



ن في اتجاه

بتحليل القوى إلى مركبات متعامدة فإن

القوتين (٣٠٠ حنا ٣٠° ، ٣٠٠ حنا ٣٠°)

(بق)

تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ج١

$$\text{حيث ج١} = ٣٠٠ \times \sin ٣٠^\circ \times ٤$$

$$= ٦٠٠ \times \frac{١}{٢} = ٣٠٠ \text{ نيوتن.متر}$$

القوتان (٣٠٠ حنا ٣٠° ، ٣٠٠ حنا ٣٠°)

تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ج٢

ة واحدة

$$\text{حيث ج٢} = ٣٠٠ \times \sin ٣٠^\circ \times ٤ = ٦٠٠ \text{ نيوتن.متر}$$

القوتان (٣٠٠ حنا ٣٠° ، ٣٠٠ حنا ٣٠°) تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ج٣

$$\text{حيث ج٣} = ٣٠٠ \times \sin ٣٠^\circ \times ٢ = ٣٠٠ \times \frac{١}{٢} \times ٢ = ٣٠٠ \text{ نيوتن.متر}$$

القوتان (٣٠٠ حنا ٣٠° ، ٣٠٠ حنا ٣٠°) تكونان ازدواجاً القياس الجبرى لعزمه ج٤

$$\text{حيث ج٤} = ٣٠٠ \times \sin ٣٠^\circ \times ٢ = ٣٠٠ \times \frac{١}{٢} \times ٢ = ٣٠٠ \text{ نيوتن.متر}$$

$$\therefore \text{القياس الجبرى لعزم الازدواج المحصل} = ٣٠٠ + ٣٠٠ + ٣٠٠ + ٣٠٠ = ١٢٠٠ \text{ نيوتن.متر}$$

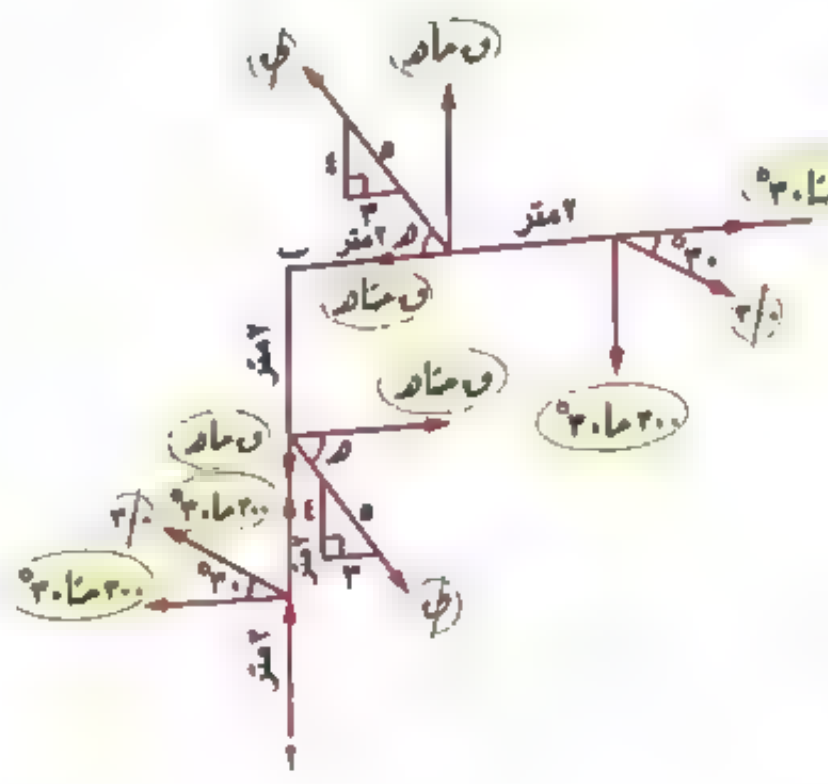
$$\therefore ١٢٠٠ - ١٠٠ = ١١٠٠ \text{ نيوتن.متر}$$

$$\therefore ١١٠٠ = ٣٠٠ \times \sin ٣٠^\circ \times ٢ \Rightarrow \sin ٣٠^\circ = \frac{١١٠٠}{٦٠٠} = \frac{١١}{٦}$$

$$\therefore \sin ٣٠^\circ = \frac{١١}{٦}$$

$$\therefore \sin ٣٠^\circ = \frac{١١}{٦} \Rightarrow ٣٠^\circ = \sin^{-1} \left(\frac{١١}{٦} \right)$$

(٣٠٠ نيوتن)



حل آخر:

$$\therefore \frac{4}{5} = \text{مأه} , \frac{2}{5} = \text{مأه}$$

، القوتان (200 ، 200)

تكونان ازدواجًا القياس الجبري لعزمه ج،

$$\text{حيث ج،} = 200 \times \frac{4}{5} \times \sqrt{2} = 200 \times \frac{4}{5} \times 1.414 = 113.12$$

$$= \frac{200 + 200}{4} \times \frac{4}{5} \times \sqrt{2} \times 200 =$$

$$= 113.12 - 113.12 = 0$$

، القوتان (ج ، ج) تكونان ازدواجًا القياس الجبري لعزمه ج،

$$\text{حيث ج،} = 200 \times \frac{2}{5} \times \sqrt{2} = 200 \times \frac{2}{5} \times 1.414 = 113.12$$

$$= 200 \times \frac{2}{5} \times \sqrt{2} = 200 \times \frac{2}{5} \times 1.414 = 113.12$$

$$= \left[\frac{4}{5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \times 200 \times \sqrt{2} =$$

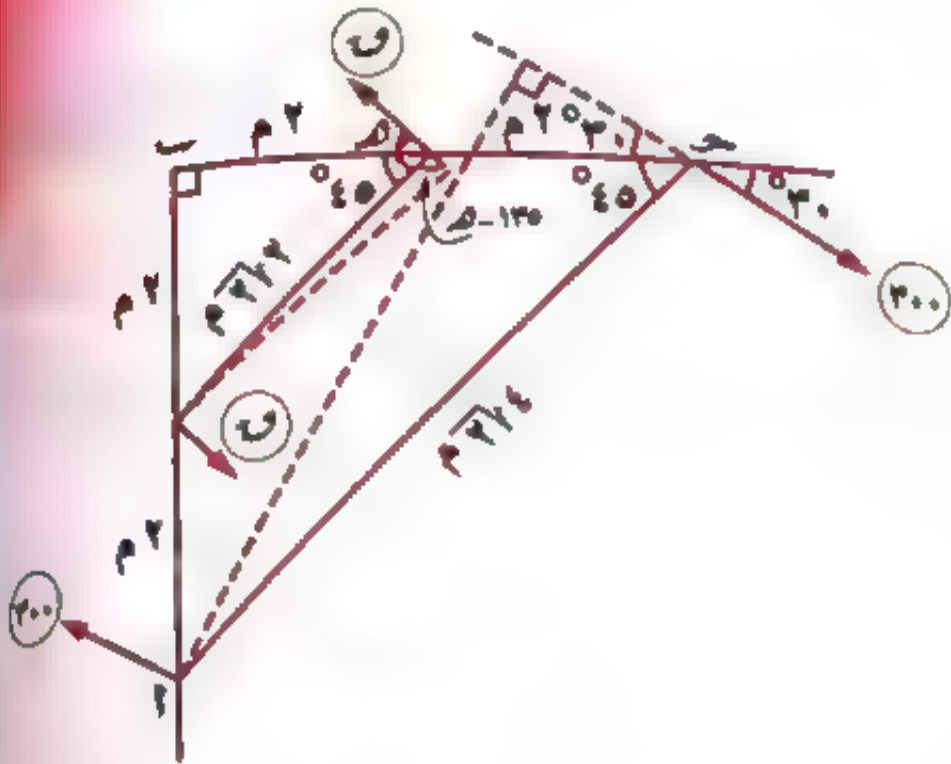
$$= \frac{14}{5} \times 200 \times \sqrt{2} = 113.12$$

$$\therefore 113.12 - 113.12 = 0 \text{ ج، ج،}$$

$$\therefore 113.12 - 113.12 = 0 \text{ ج، ج،}$$

$$\therefore \frac{14}{5} = 2.8$$

$$\therefore 200 = 200 \text{ نيوتن.}$$



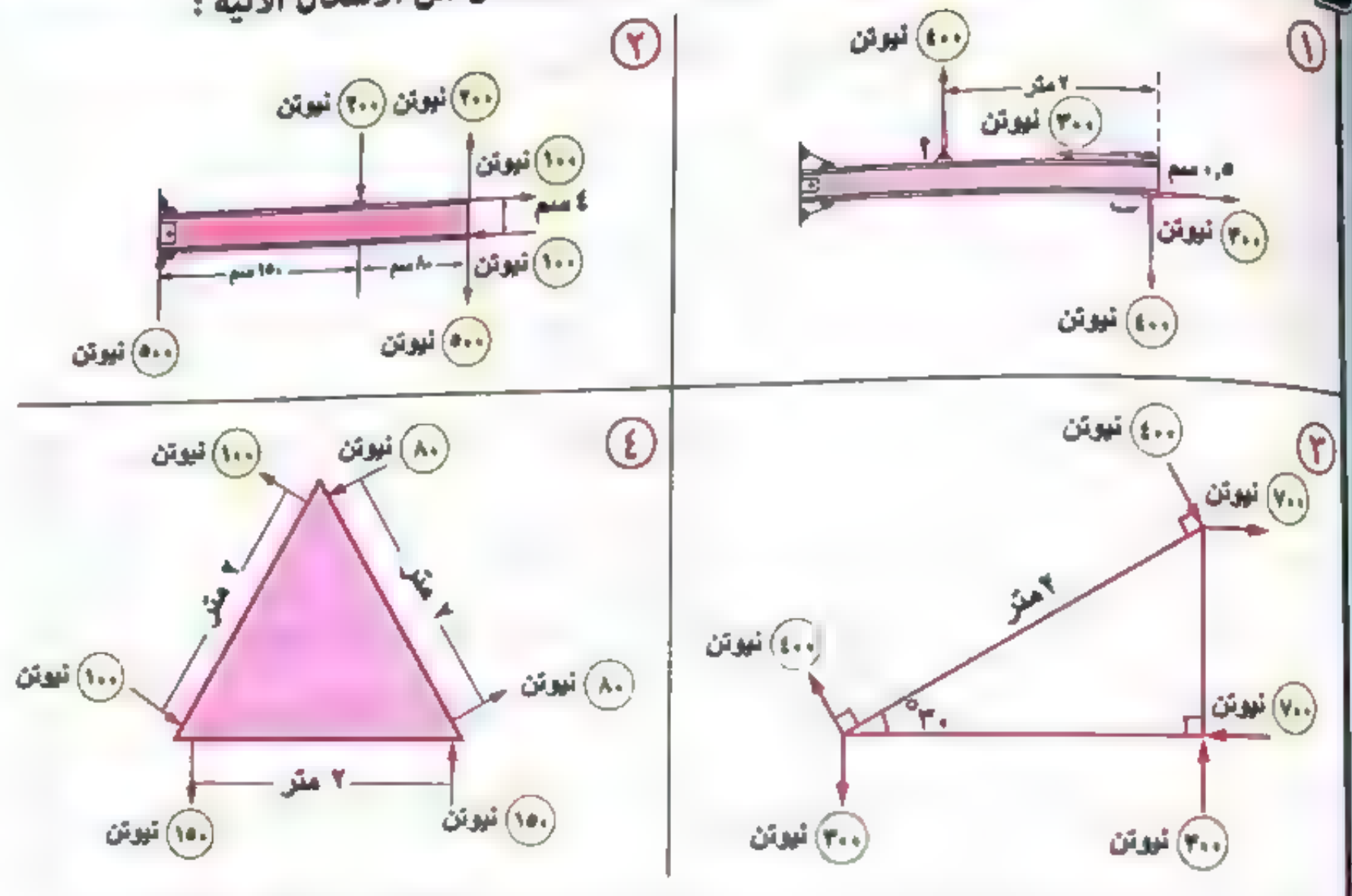
على الازدواج المحصل

اختبار تفاعلي



من أسئلة الكتاب المدرسي

أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل لكل شكل من الأشكال الآتية :



١ ب ح د مستطيل فيه : $أ = ٦$ سم ، $ب = ٨$ أثرت قوى مقدار كل

منها ٧ ث. كجم في كل من $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ ، ٤ على الترتيب.

٩٨ ث. كجم. سم.

أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا ، أوجد معيار عزمه.

٢ ١ ب ح د مربع طول ضلعه ٢٠ سم أثرت القوى التي مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ث. كجم

في $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ ، ٤ على الترتيب كما أثرت قوتان مقدار كل منهما ٢٢ ث. كجم

في الرأسين ١ ، $ح$ في اتجاه $ب$ ، $د$ على الترتيب.

١٢٠ ث. كجم. سم.

أوجد معيار الازدواج المحصل الذي يكافئ المجموعة.

٣ (دور اول ٢٠٠١) ١ ب ح د متوازي أضلاع فيه : $أ = ٦$ سم ، $ب = ٨$ سم

١ ، ٢ أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ١٠ ، ٨ ، ١٠ نيوتن في $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ ، ٤ على الترتيب.

أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ مجموعة هذه القوى. ٢٢ نيوتن. سم.

٥ أ ب ح د متوازي أضلاع فيه : $a = 6$ سم ، $b = 10$ سم ، وطول العمود الساقط من الرأس e على $b = 4.5$ سم أثرت القوى 12 ، 10 ، 12 ، 10 ثقل كجم في a ، a ، b ، b على الترتيب كما أثر ازدواج متجه عزمه عمودي على المستوى a ح د ومعيار عزمه 72.5 ثقل كجم . سم فأوجد معيار عزم الازدواج المحصل إذا كان :

١ اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى في نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقدارهما 12 ، 12 ثقل كجم .

٢ اتجاه متجه عزم الازدواج المعطى في نفس اتجاه متجه عزم الازدواج المكون من القوتين اللتين مقدارهما 10 ، 10 ثقل كجم .

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ قوى 4 ، 3 ، 4 ، 3 نيوتن تؤثر في أضلاع مربع a ح د في اتجاه a ، b ، b ، a على الترتيب فإذا كان طول ضلع المربع l فإن محصلة القوى تكافئ :

(١) قوة مقدارها $2\sqrt{2}l$ وتمر بمركز المربع (ب) قوة مقدارها $14l$ وتمر بالنقطة a

(ج) ازدواج معيار عزمه $7l$ (د) ازدواج معيار عزمه l

٢ يؤثر على الجسم ازدواجان ، الأول مقدار إحدى قوتيّه 20 ث كجم وذراع العزم $= \frac{1}{4}$ متر واتجاه دورانه في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة والثاني مقدار إحدى قوتيّه 20 ث كجم وذراع العزم $= 1$ متر واتجاه دورانه هو اتجاه عقارب الساعة فإن القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل = ث كجم . متر .

(١) 20 (ب) -20 (ج) 40 (د) 10

٣ إذا وقع جسم تحت تأثير ازدواجين مستويين متجهها عزميهما J_1 ، J_2 وكان : $J_1 \neq J_2$ ، $J_1 + J_2 \neq 0$ صفر فإن :

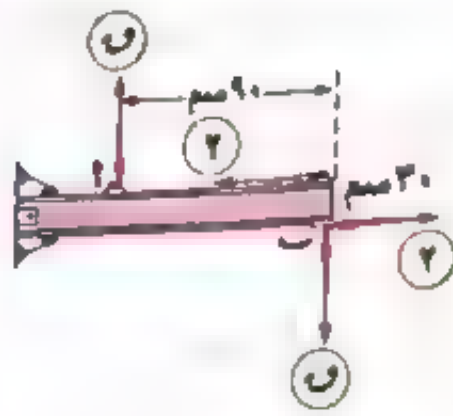
(١) الجسم متزن .

(ب) الازدواجين متكافئين .

(ج) الجسم يتحرك حركة خطية .

(د) الجسم يتحرك حركة دورانية .

٤ في الشكل المقابل :



إذا كان عزم الازدواج المحصل = - ١,٥ نيوتن متر

فإن : $\omega = \dots$ نيوتن.

- (١) $\frac{7}{3}$ (ب) $\frac{41}{6}$
(ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{13}{6}$

٧ أ ب ح د مستطيل فيه : أ ب = ١٠ سم ، ح ب = ١٢ سم ، نصف أ ب في ح د ، ح د في ح وأثرت قوى مقاديرها ١٨٠ ، ٢٠٠ ، ١٨٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ، ٢٦٠ ثجم في أ ب ، ح ب ، ح د ، د أ ، أ ح ، ح د على الترتيب. أوجد معيار عزم الازدواج المحصل.

١٠٤٠٠ ث.جم.سم.

٨ أ ب ح د ه و مسدس منتظم طول ضلعه ١٥ سم.

أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٥٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٣٠ نيوتن في أ ب ، ح ب ، ح د ، د ه ، و ه ، و أ على الترتيب. عيّن معيار عزم الازدواج المحصل. 312000 نيوتن.سم.

٩ في الشكل المقابل :



يوضح صفيحة على شكل

متوازي أضلاع أثر عليها ازدواجان.

١ أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج المكون

من القوتين ٧ ، ٧ نيوتن.

٢ أوجد القياس الجبري لعزم الازدواج المكون من

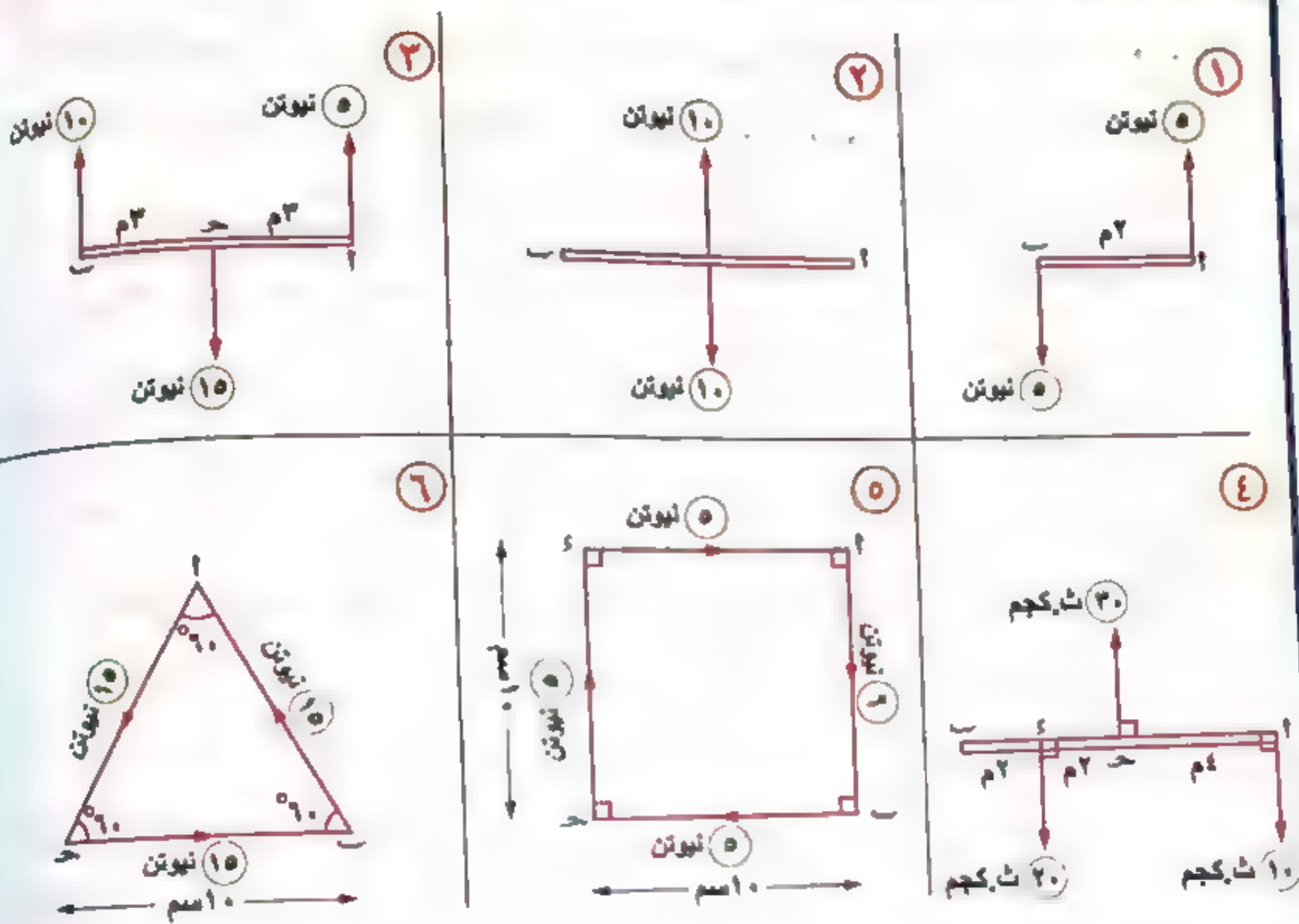
القوتين ٥ ، ٥ نيوتن عندما $\theta = 60^\circ$

٣ إذا كان القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل يساوي ٣٠ نيوتن.سم فما قيمة θ ؟

٤ إذا اترزت الصفيحة فما قيمة θ ؟

١٠ (دورثا ١٩٩٩) أ ب ح د مربع طول ضلعه ١٦ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ٤٠ ، ٤٠ ، ٤٠ ثقل جرام في أ ب ، ح د ، د ه ، ه أ على الترتيب فإذا كانت هذه القوى الأربع تكافئ ازدواجا معيار عزمه = ٤٨٠ ثجم.سم في الاتجاه د ح أوجد : ω ١٠٠ ثجم.

٢١ بين أي نظم القوى الآتية تكافئ ازدواجًا وأوجد القياس الجبري لعزمه :



٢٢ (دورثاه ٢٠١٨) أثرت القوى $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4 = \vec{F}_5 = \vec{F}_6 = \vec{F}_7 = \vec{F}_8 = \vec{F}_9 = \vec{F}_{10}$ في النقاط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ على الترتيب. برهن أن هذه المجموعة من القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. ٨٠ وحدة عزم.

٢٣ تؤثر القوى $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4 = \vec{F}_5 = \vec{F}_6 = \vec{F}_7 = \vec{F}_8 = \vec{F}_9 = \vec{F}_{10}$ في النقاط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ على الترتيب. أثبت أن هذه القوى تكافئ ازدواجًا. وأوجد معيار عزمه.

٢١ وحدة عزم

٢٤ أثرت القوى $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3 = \vec{F}_4 = \vec{F}_5 = \vec{F}_6 = \vec{F}_7 = \vec{F}_8 = \vec{F}_9 = \vec{F}_{10}$ في النقاط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ على الترتيب كما أثرت قوة \vec{F}_{11} مقدارها ١٠ نيوتن في أ. أثبت أن القوى الأربع تكافئ ازدواجًا، أوجد عزمه. ٧٠ وحدة عزم.

الدرس الثالث

١١ نيوتن ٦ نيوتن



٢٦ في الشكل المقابل :
أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً ،
أوجد القياس الجبري لعزمه .

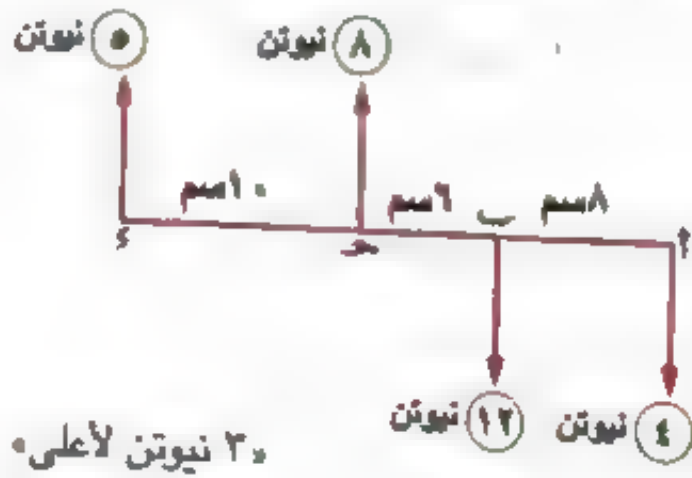
٢٦ في قضيب منتظم طوله ٢٤ سم ووزنه ٤ نيوتن يؤثر في منتصفه م ، ح ، د ، هـ ، ز ، أ حيث :
أ ح = ٦ سم ، د هـ = ١٤ سم . أثرت قوتان مقدارهما ٨ ، ١٢ نيوتن في النقطتين أ ، ب على
الترتيب رأسياً إلى أعلى ، كما أثرت قوتان مقدارهما ٩ ، ٧ نيوتن في نقطتي ح ، د على
الترتيب رأسياً إلى أسفل . أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه . ٨٨ نيوتن . سم .



٢٧ في الشكل المقابل :

أ ب = ح د = هـ ز = ٢ سم

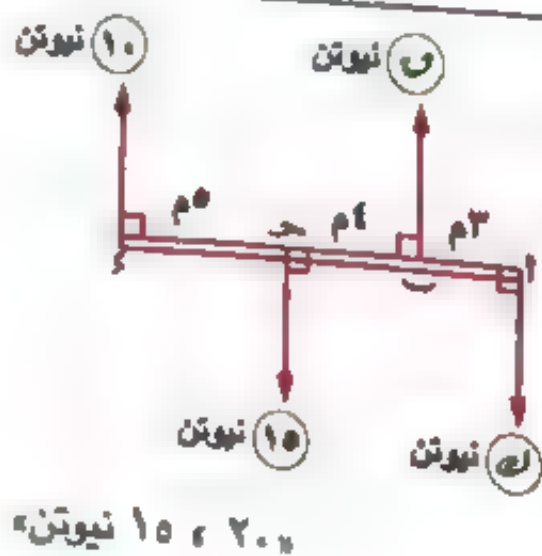
أوجد مقدار واتجاه وخط عمل قوة و بحيث تؤول
مجموعة القوى إلى ازدواج القياس الجبري لعزمه
يساوي ٢٦ ثقل جم . سم .



٢٨ في الشكل المقابل :

أ ب = ٨ سم ، ب ح = ٦ سم

ح د = ١٠ سم . أوجد مقدار واتجاه وخط عمل
قوة و بحيث تؤول المجموعة إلى ازدواج القياس
الجبري لعزمه يساوي ١٥١ نيوتن . سم .



٢٩ في الشكل المقابل :

يوضح مجموعة من القوى المؤثرة على قضيب أ هـ تكون
ازدواجاً القياس الجبري لعزمه يساوي ٧٥ نيوتن . م .
أوجد قيمة كل من : و ، ل هـ

٢٠ ، ١٥ نيوتن

٦ إذا كانت القوى \vec{P} ، \vec{Q} ، \vec{R} تؤثر في النقط $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ وتكافئ ازدواج بحيث كانت : $\vec{P} = 3\vec{S} + 4\vec{V}$ ، $\vec{Q} = -\vec{S} + \vec{V}$ فإن : مقدار عزم الازدواج =

٦ (د)

٤ (ج)

٢- (ب)

٢ (١)

٧ إذا كان نظام القوى

المقابل يكافئ ازدواج

فإن : $\vec{Q} = \dots\dots\dots$ نيوتن.

٧ (ب)

٢ (١)

١٧ (د)

١٠ (ج)

٨ القياس الجبري لعزم الازدواج

لمجموعة القوى الموضحة

بالشكل بوحدة نيوتن متر تساوى

٢٠- (ب)

١٥٠- (١)

١٢٥ (د)

١٥- (ج)

٩ في الشكل المقابل :

أ ب ح د مربع ، القوى المبينة مقاسة بالداين

، فإذا كانت مجموعة القوى تكافئ ازدواجًا

فإن : $\vec{Q} - \vec{P} = \dots\dots\dots$ دايين.

٢ (ب)

٢ (١)

١- (د)

١ (ج)

١٠ (دور اول ٢٠١٧) في الشكل المقابل :

إذا كانت مقادير القوى بالنيوتن والمجموعة متزنة

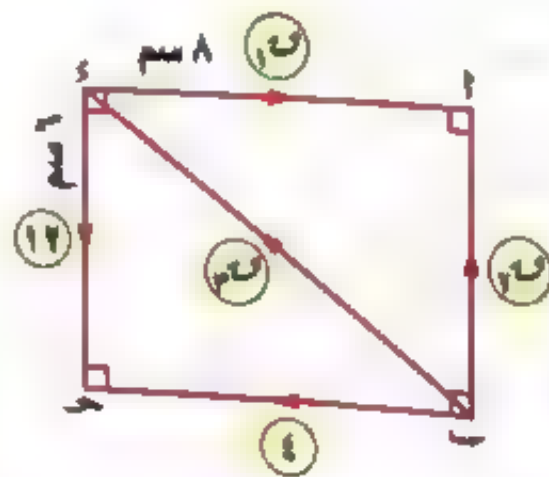
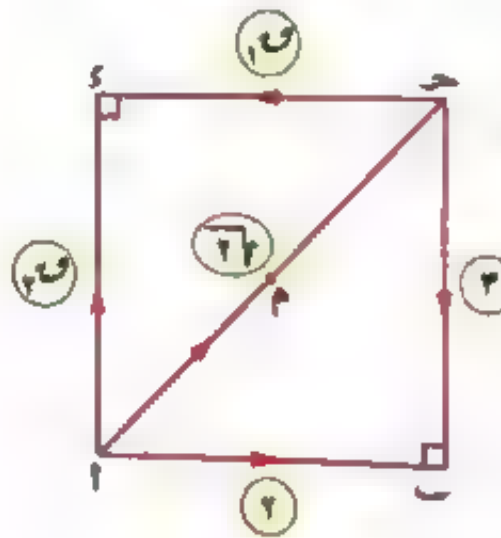
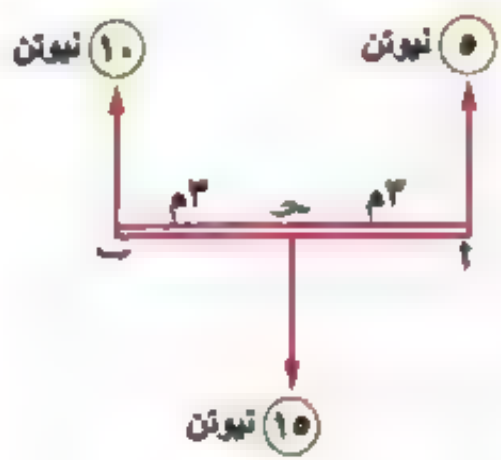
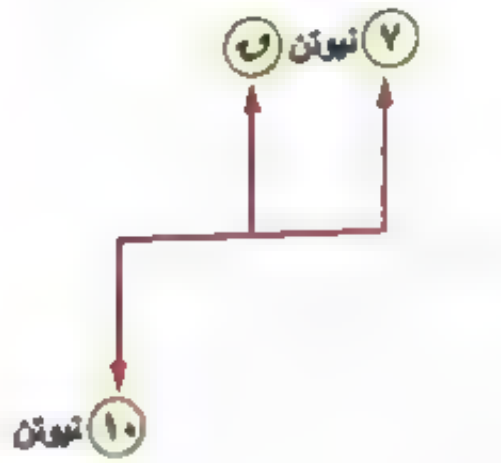
فإن : $\vec{Q} = \dots\dots\dots$ نيوتن.

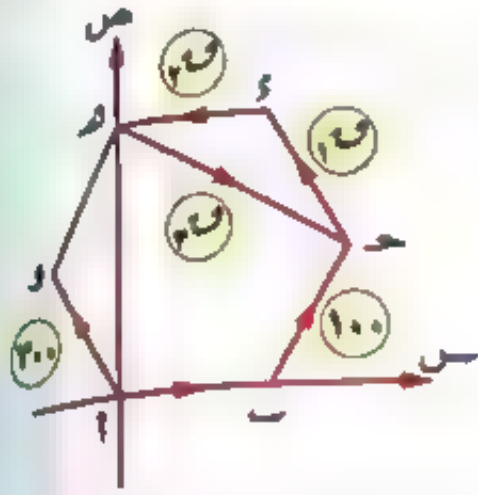
٥ (ب)

١٦ (١)

٨ (د)

٢ (ج)





١١) (دور اول ٢٠١٩) في الشكل المقابل :

أ ب ح د ه و سداسي منتظم طول ضلعه ٤٠ سم

، إذا كانت القوى المعطاة متزنة

فإن : و = نيوتن.

(١) ٦٠٠ (ب) $3\sqrt{3} ٢٠٠$

(ج) ١٠٠ (د) ١٥٠

١٢) أى مجموعات القوى الآتية إذا أثرت فى

أضلاع المثلث أ ب ح وفى ترتيب دورى واحد

فإنها تكافئ ازدواج ؟

(١) ١٠ ، ١٠ ، ١٠ نيوتن.

(ب) ٦ ، ٨ ، ١٠ نيوتن.

(ج) ١٢ ، ١٢ ، ١٢ نيوتن.

(د) ١٥ ، ١٥ ، ١٥ نيوتن.



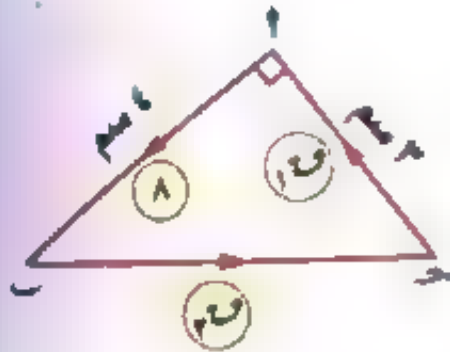
١٣) فى الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ ب = ٤ سم

، أ ح = ٣ سم ، والقوى المبينة مقاسة بالنيوتن وممثلة تمثيلاً

تاماً بأضلاع المثلث وكانت مجموعة القوى تكافئ ازدواج

فإن : و + و = نيوتن.



(١) ٦

(ب) ١٠

(ج) ٤

(د) ١٦

١٤) فى الشكل المقابل :

أ ب ح د شبه منحرف قائم الزاوية فى أ

، مثلت القوى المبين مقاديرها واتجاهاتها

تمثيلاً تاماً بأضلاع شبه المنحرف فإذا كانت

المجموعة تكافئ ازدواج

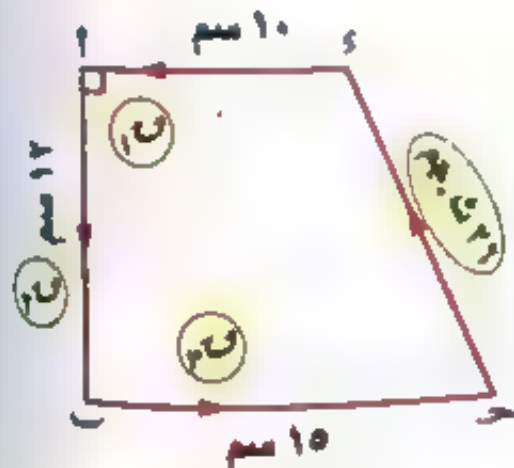
فإن : و + و + و = ثقل جرام.

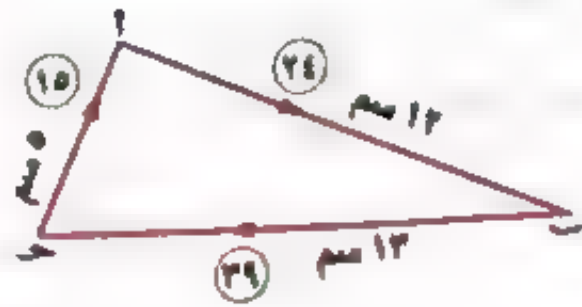
(١) ٧٤

(ب) ٣٠

(ج) ٢٤

(د) ٢٠





إذا كانت مقادير القوى مقدرة بالنيوتن
فإن مقدار القوة التي تضاف للمجموعة
لتكافئ ازدواج =

- (أ) ٢ نيوتن في اتجاه \overrightarrow{AB}
(ب) ١٢ نيوتن في اتجاه \overrightarrow{AB}
(ج) ١٢ نيوتن في اتجاه \overrightarrow{AC}
(د) ٢٦ نيوتن في اتجاه \overrightarrow{AC}

١٦ إذا كانت A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة بحيث كان هناك مجموعة من القوى في مستواها تكون ازدواج وكان : $2 \text{ ج} + 2 \text{ ج} + 5 \text{ ج} = 240 \text{ نيوتن سم}$
فإن : $4 \text{ ج} - 2 \text{ ج} = \dots \text{ نيوتن سم}$

- (أ) ٢٤ (ب) ٤٨ (ج) ٩٦ (د) ١٩٢

٢١ أ ب ح مثلث فيه : $A = 10.5 \text{ سم}$ ، $B = 14 \text{ سم}$ ، $C = 17.5 \text{ سم}$
أثرت قوى مقاديرها 4.5 ، 6 ، 7.5 نيوتن في A, B, C على الترتيب.
بين أن مجموعة هذه القوى تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٦٢ نيوتن.سم»

٢٢ ثلاث قوى مقاديرها 15 ، 15 ، 18 ثقل كجم يمثلها تمثيلًا تامًا A, B, C ، B من المثلث A الذي فيه : $B = 12 \text{ سم}$
أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ القوى الثلاث. «١٤٤ ثقل كجم.سم»

٢٣ أ ب ح مثلث فيه : $A = 5 \text{ سم}$ ، $B = 6 \text{ سم}$ ، $C = 7 \text{ سم}$ أثرت قوى مقاديرها 250 ، 300 ، 350 ثقل جرام في A, B, C على الترتيب.
بين أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٦٠٠٠ ثقل جم.سم»

٢٤ أ ب ح مثلث فيه : $A = 10 \text{ سم}$ ، $B = 16 \text{ سم}$ ، $C = 20 \text{ سم}$ أثرت قوى مقاديرها 2.5 ، 4 ، 3.5 ثقل كجم في A, B, C على الترتيب.
بين أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه. «٢٠٠ ثقل جم.سم»

٣٥ ثلاث قوى مقاديرها ١٠.٥ ، ١٢ ، ١٩.٥ نيوتن يمثلها تمثيلاً تاماً القطع المستقيمة الموجهة \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب من المثلث $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ الذي فيه $\vec{a} = 13$ سم أوجد معيار عزم الازدواج الذي يكافئ القوى الثلاث.

٣٦ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ مثلث فيه : $\vec{a} = 5$ سم ، $\vec{b} = 12$ سم ، $\vec{c} = 13$ سم أثرت القوى ١٥ ، ٢٦ ، ٢٩ ثقل جرام في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب أوجد القوتين المتساويتين في المقدار وتؤثران في نهايتي \vec{a} وعموديتين عليه لكي تحدثا اتزاناً مع مجموعة القوى السابقة.

٣٧ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ مثلث فيه : $\vec{a} = 13$ سم ، $\vec{b} = 14$ سم ، $\vec{c} = 15$ سم أثرت القوى التي مقاديرها ٢٩ ، ٤٢ ، ٤٥ نيوتن في الاتجاهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه ثم أوجد قوتين متوازيتين عند \vec{b} ، \vec{c} عموديتين على \vec{b} لتتزن مع القوى السابقة. « ٥.٤ نيوتن. سم ، ٢٦ ، ٢٦ نيوتن »

٣٨ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ مثلث متساوي الساقين فيه : $\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = 13$ سم ، $\vec{d} = 10$ سم ، \vec{e} منتصف \vec{b} أثرت القوى ٥٢ ، ٢٠ ، ٤٨ نيوتن في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب. أثبت أن مجموعة القوى تكافئ ازدواجاً وأوجد القياس الجبري لعزمه. أوجد مقدار قوتين إحداهما في \vec{a} والآخرى تؤثر عند \vec{b} في اتجاه \vec{a} بحيث تصبح المجموعة في حالة توازن.

٣٩ (دور أول ٢٠١١) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ مستطيل فيه : $\vec{a} = 9$ سم ، $\vec{b} = 24$ سم ، $\vec{c} = 24$ سم ، $\vec{d} = 9$ سم منتصفاً \vec{b} ، \vec{c} على الترتيب. أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٤٨ ، ٢٠ ، ٢٤ ث. جم في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه. ثم أوجد مقداري القوتين اللتين تؤثران في \vec{d} ، \vec{e} حتى تحدث اتزاناً مع القوى المعلومة.

٤٠ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ شبه منحرف متساوي الساقين فيه : $\vec{a} // \vec{b}$ ، $\vec{c} = 9$ سم ، $\vec{d} = 15$ سم ، $\vec{e} = 23$ سم أثرت القوى ٤٥ ، ٩٩ ، ٤٥ ، ٢٧ نيوتن في الاتجاهات \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه.

« ١١٣٤ نيوتن. سم »

٤١ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ شبه منحرف فيه : $\vec{a} // \vec{c}$ ، $\vec{b} = (\vec{a} + \vec{c})$ ، $\vec{a} = 9$ سم ، $\vec{b} = 24$ سم ، $\vec{c} = 12$ سم أثرت قوى مقاديرها ٤٨ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ نيوتن في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه.

٦٤٨٠ نيوتن.سم.

٤٢ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ شكل خماسي فيه : $\vec{a} = (\vec{b} + \vec{c})$ ، $\vec{b} = (\vec{c} + \vec{d})$ ، $\vec{c} = (\vec{d} + \vec{e})$ ، $\vec{d} = 16$ سم ، $\vec{e} = 10$ سم ، $\vec{a} = 20$ سم أثرت قوى مقاديرها ٨ ، ٥ ، ١٠ ، ٥ ، ٦ ثقل جرام في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً واحسب معيار عزمه.

٢٩٦٠ ثقل جرام.سم.

٤٣ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ شكل سداسي منتظم طول ضلعه ١٥ سم أثرت قوى مقدار كل منها ١٠ ث.كجم في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه.

١٦٠.١٤٠ ث.كجم.سم.

٤٤ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ شكل سداسي منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٢٠ ، ٢٠ نيوتن في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e} كما أثرت قوتان في \vec{b} ، \vec{d} وأوجد مقدار واتجاه القوتين لكي تتزن المجموعة.

٢٠ ، ٢٠ نيوتن في \vec{b} ، \vec{d} .

٤٥ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ شكل سداسي منتظم طول ضلعه ٦ سم أثرت القوى ١١ ، ٢٧ ، ١٦ ثقل جرام في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه.

١٥٠ ثقل جم.سم.

٤٦ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ شكل سداسي منتظم طول ضلعه ١٦ سم أثرت القوى ٨ ، ٨ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ثقل جرام في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه.

٢٢٠ ثقل جرام.سم.

٤٧ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ شبه منحرف فيه : $\vec{a} // \vec{c}$ ، \vec{b} عمودي عليهما ، \vec{d} مسقط على \vec{b} ، $\vec{a} = 7.5$ سم ، $\vec{b} = 4$ سم ، $\vec{c} = 4.5$ سم أثرت قوى مقاديرها ١٨ ، ٢٧ ، ٣٠ ، ١٨ ، ٥١ نيوتن في \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} ، \vec{e} على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجاً وأوجد معيار عزمه.

٢٧ نيوتن.سم.

٥٦ \overline{AB} مربع طول ضلعه ٦٠ سم أثرت قوى مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ٨٠ ، ٥٠ نيوتن في A ، B ، C ، D على الترتيب وأثرت قوتان مقدارهما ٢٥ ، ٢٠ نيوتن في A ، C على الترتيب. برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا معيار عزمه ٤٨٠٠ نيوتن.سم.

٥٥ \overline{AB} مربع طول ضلعه ١٠ سم ، $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ ، $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$ ، بحيث كان : $\overline{AD} = \overline{BC} = ٢٠$ سم. أثرت قوى مقاديرها ٤٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ث.كجم في A ، B ، C ، D ، E على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه.

١٠٠٠ ث.كجم.سم.

٥٤ \overline{AB} مستطيل فيه : $\overline{AB} = ٢٠$ سم ، $\overline{BC} = ٤٠$ سم أثرت قوى مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٥ ث.كجم في A ، B ، C ، D ، E على الترتيب. برهن أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

٢٢٠٠ ث.كجم.سم.

٥٧ \overline{AB} مستطيل فيه : $\overline{AB} = ٢$ م ، \overline{AD} و \overline{BC} متصفا \overline{AD} ، \overline{BC} أثرت القوى ٤ ، ٤ ، ٤ ، ١٤ ، ١٠ ، ٢٢ ثقل جرام في A ، B ، C ، D ، E ، F على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا واحسب معيار عزمه بدلالة طول \overline{AB}

٦٠ ثقل جم.سم.

٥٨ \overline{AB} شبه منحرف قائم الزاوية في B ، $\overline{AB} // \overline{CD}$ ، $\overline{AB} = ٦$ سم ،

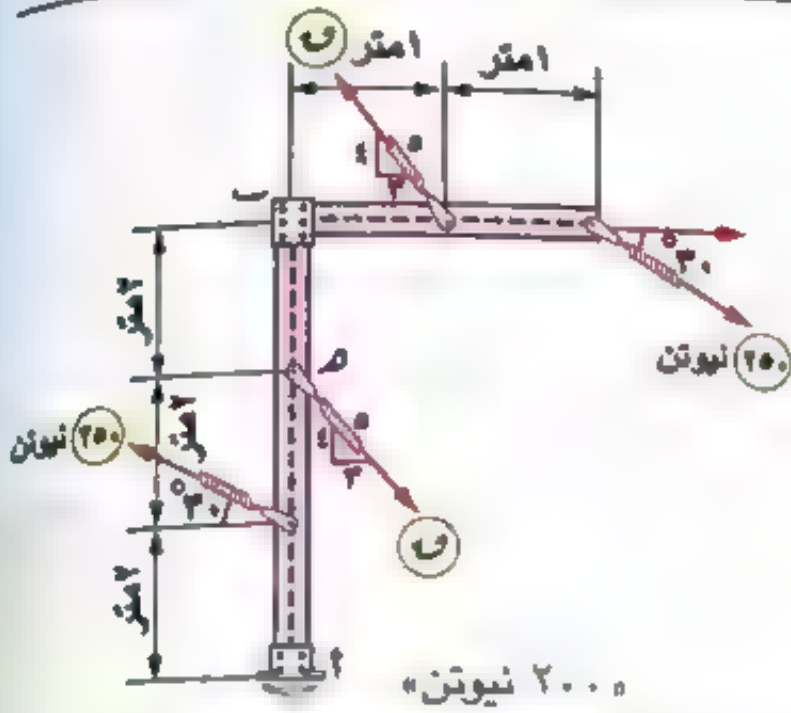
$\overline{BC} = ١٦$ سم ، $\overline{CD} = ١٨$ سم ، $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ حيث : $\overline{AD} = ٦$ سم أثرت قوى مقاديرها ٤ ، ٥ ، ١٢ ، ١٣ ، ٣٠ ، ١٥ نيوتن في A ، B ، C ، D ، E ، F أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

٢٦٠٠ نيوتن.جم.

٥٩ \overline{AB} شبه منحرف فيه : $\overline{AD} // \overline{BC}$ ، $\overline{AD} = ٩٠$ ، $\overline{AB} = ١٢$ سم ، $\overline{BC} = ١٨$ سم ، $\overline{AD} = ٩$ سم ، أثرت القوى التي مقاديرها ٢٠٠ ، ٦٠٠ ، ٥٠٠ ، ١٢٠٠ ، ١٣٠٠ ث.كجم في A ، B ، C ، D ، E ، F على الترتيب. أثبت أن المجموعة تكافئ ازدواجًا وأوجد معيار عزمه.

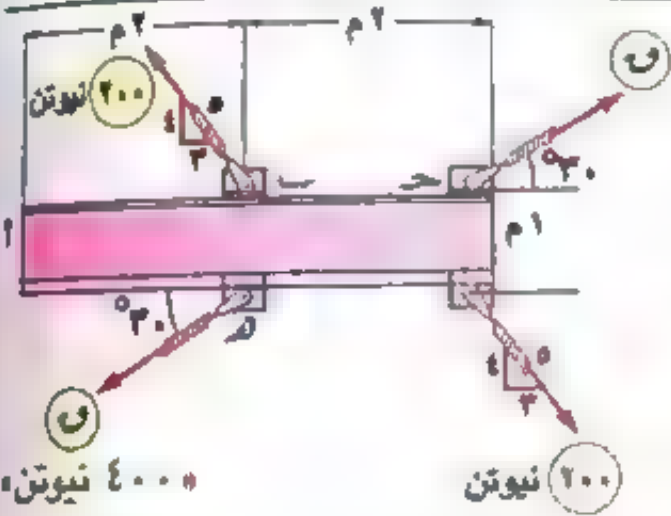
١٠٨٠٠٠ ث.كجم.سم.

٦٠ أ ب ح د مستطيل فيه : أ ب = ١٠ سم ، ب ح = ٥ سم ، فإذا كانت و هي متصل
أ ب ، أثرت القوى التي مقاديرها ٤ ، ٥ ، ١٥ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٢ ، ٢ ثقل حجم في أ ب
ح ب ، ح د ، د أ ، أ ح ، و ح على الترتيب أثبت أن هذه المجموعة تكافئ ازدواجاً
و احسب معيار عزمه .
٤٠٠ ث . جم . سم .



٦١ في الشكل المقابل :

أوجد و التي تجعل القياس
الجبري لعزم الازدواج المحصل
يساوي (١٥٠ - ٢٥٠) نيوتن . متر .



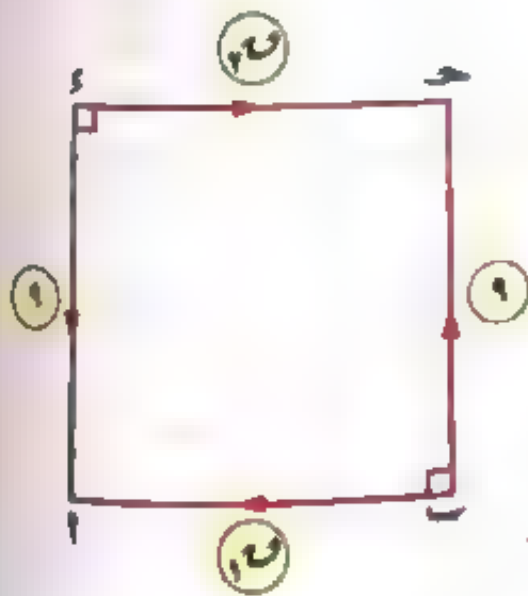
٦٢ في الشكل المقابل :

يمثل قنطرة تؤثر عليها القوى الموضحة بالشكل إذا
كان القياس الجبري لعزم الازدواج المحصل يساوي
(٢٠٠ - ٢٠٠) نيوتن . م .
أوجد : و

مسائل يقس مستويك على من التميز

٦٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ في الشكل المقابل :



أ ب ح د مربع طول ضلعه ٤ سم أثرت القوى المبين

مقاديرها على الرسم وكانت تكافئ ازدواج

معيار عزمه = ٢٠ نيوتن . سم

فإن : و = و = و =

(د) ٥٦ ، ٢٢

(ب) ١٤ ، ٥٦ (ج) ٤ ، ٥٦

(أ) ٤ ، ١٤

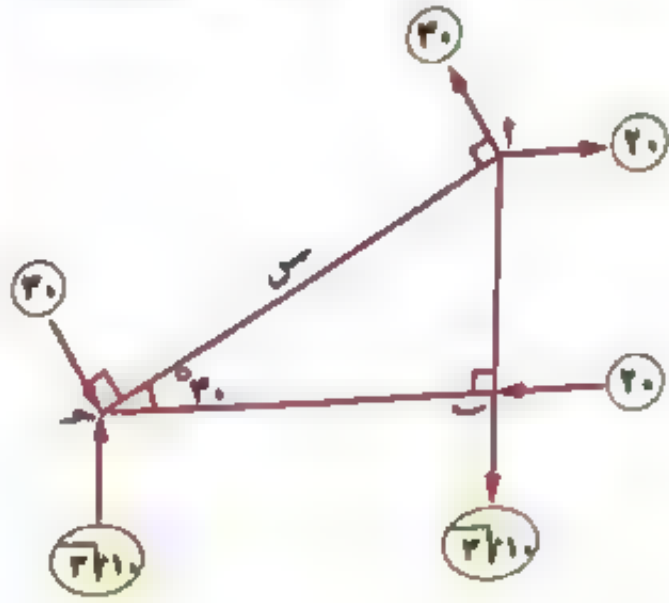
٢ في الشكل المقابل :

إذا كان القياس الجبري لعزم الازدواج
المحصل يساوي ١٠٠ نيوتن سم

فإن : $S = \dots\dots\dots$ سم

(أ) ١٠ (ب) ٢٠

(ج) ٢٥ (د) ٣٠

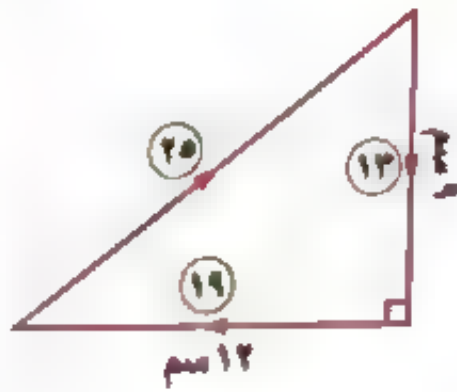


٣ في الشكل المقابل :

إذا كانت مقادير القوى مقاسة بالنيوتن
فإن مقدار القوة (٢) التي يجب إضافتها
إلى كل قوة من القوى المعطاة حتى تجعل

المجموعة تكافئ ازدواج يساوي نيوتن.

(أ) ٢ (ب) ٣ (ج) ٤ (د) ٥



٤ مجموعة القوى في

الشكل المقابل

(أ) متزنة.

(ب) تكافئ قوة.

(ج) تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه موجب.

(د) تكافئ ازدواج القياس الجبري لعزمه سالب.



٥ في الشكل المقابل :

ثلاث قوى متوازية مقاسة بالنيوتن

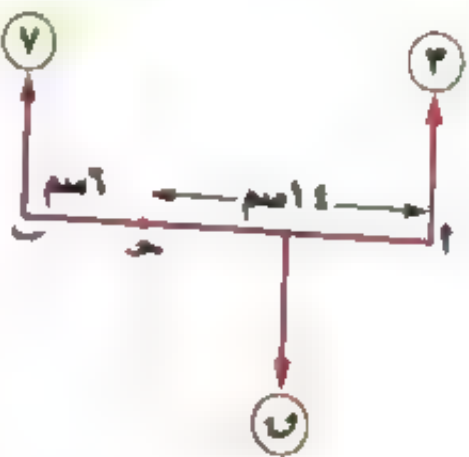
فإن كانت المجموعة تكون ازدواج فإن

(أ) $10 = 10$ نيوتن وتؤثر في حـ

(ب) $10 = 10$ نيوتن وتؤثر في بـ

(ج) $4 = 10$ نيوتن وتؤثر في أـ

(د) $10 = 10$ نيوتن وتؤثر في أي نقطة على القضيب غير نقطة حـ



٦٤ **أ** ح مثث ، ي مركز الدائرة الداخلة ، أثرت خمس قوى في **أ** ، **ب** ، **ي** ، **أ** ، **ح** ، **و** ، **ي** ، **أ** على الترتيب فإذا كانت مقادير هذه القوى تمثل بالأطوال **أ** ، **ب** ، **ي** ، **أ** ، **ح** ، **و** ، **ي** ، **أ** على الترتيب. فبرهن أنها تكافئ ازدواجًا وأوجد عزمه بدلالة أطوال **أ** ، **أ** ، **ح** ، ونصف قطر الدائرة الداخلة متى تتوازن هذه القوى. «نق (أ - ب) وحدة عزم»

٦٥ **أ** ح و هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ١٠ سم أثرت قوى مقاديرها ٢ ، ٥ ، ٤ ، ٦ ، ١ ، ٢ نيوتن في **أ** ، **ح** ، **ب** ، **و** ، **هـ** ، **و** ، **أ** على الترتيب. أوجد مقدار واتجاه القوة التي يجب أن تؤثر في مركز المسدس لكي تقول المجموعة إلى ازدواج ثم عين عزمه. «٢ نيوتن في اتجاه **ح** ، -٣٥ نيوتن. سم»

مركز الثقل

6



يمكنك حل
الامتحانات التفاعلية
على الدروس
من خلال مسح **QR code**
الخاص بكل امتحان

مركز الثقل.

الدرس الأول

طريقة الكتلة السالبة.

الدرس الثاني



مركز الثقل

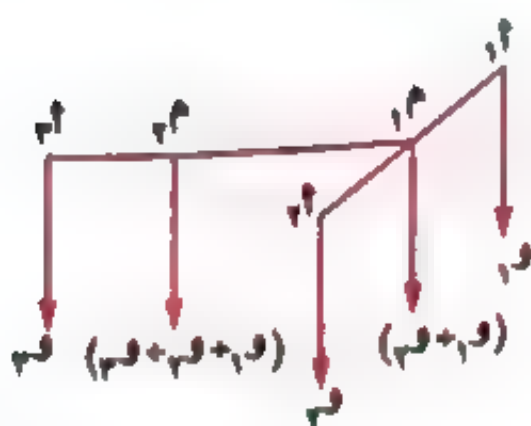
1

سبق أن عرفنا الجسيم على أنه جسم يمكن اعتباره مركزاً في نقطة هندسية والجسم يمكن تقسيمه إلى عدد من الأجزاء كل جزء من هذه الأجزاء نعتبره جسيماً والجسم الذي تكون فيه المسافة الفاصلة بين أى جسيمين من الجسيمات المكونة له ثابتة يطلق عليه اسم الجسم المتناسك أو الجاسى.

مركز ثقل الجسم الجاسى

- أى جسم يعتبر مكوناً من مجموعة من الجسيمات الصغيرة وبالتالي يكون تأثير الجاذبية الأرضية على هذا الجسم هو ناتج تأثيراتها على الجسيمات المكونة له.
- كل من هذه الجسيمات يقع تحت تأثير قوة جذب تساوى فى المقدار وزن هذا الجسيم وتعمل فى الخط المستقيم المار بهذا الجسيم وبمركز الكرة الأرضية.
- نظراً لأننا نتعامل مع أجسام ذات أبعاد فراغية ضئيلة للغاية بالمقارنة بالمسافة الكبيرة التى تفصل بينها وبين مركز الكرة الأرضية فإنه يمكن اعتبار خطوط عمل أوزان الجسيمات المكونة للجسم متوازية وعلى ذلك يمكن إيجاد قوة وحيدة هى محصلة هذه القوى وهى تساوى من حيث المقدار مجموع أوزان هذه الجسيمات وتعمل رأسياً لأسفل نحو الأرض.
- وتسمى هذه المحصلة وزن الجسم وتعمل رأسياً لأسفل وموجهة نحو الأرض ومقدارها هو وزن الجسم أو ثقله بينما نقطة تأثيرها فى الجسم تسمى مركز ثقل الجسم.

فمثلاً :



إذا اعتبرنا ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ مجموعة من الجسيمات المكونة لجسم جاسى وأن ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ هى أوزان هذه الجسيمات على الترتيب وتؤثر رأسياً لأسفل كما فى الشكل المقابل.

محصولة القوتين المتوازيتين W ، وهما المؤثرتين عند A ، B على الترتيب وتمر بالنقطة M هي $(W + W_1)$ لذلك فإن : $W_1 \times AM = W \times BM$ وهما كان وضع الجسم بالنسبة للأرض وذلك لأن البعد بين النقطتين A ، B ثابت لأن الجسم جاسئ وبالتالي تظل M ثابتة.

* محصلة القوتين المتوازيتين $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ ، هي $(F_1 + F_2 + F_3)$ ونفرض أن نقطة تأثيرها هي M لذلك فإن : $\vec{F}_3 \times \vec{r}_M = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \times \vec{r}_M$ وتظل المسافة r_M ثابتة.

وبالتالي فإن γ نقطة ثابتة مهما كان وضع الجسيمات عند النقاط $1, 2, 3$

نستمر بعد ذلك في تحصيل وزن الجسيم ρ وهي (و) مع المحصلة المارة بالنقطة م، وهكذا حتى يتم تجميع كافة أوزان الجسيمات المكونة للجسم الجاسي وفي النهاية نصل إلى أن وزن الجسم يساوي مجموع جميع أوزان الجسيمات ويمر دائماً بنقطة ثابتة الوضع ولتكن (م)

تعريف

مركز ثقل الجسم الجاسي هو نقطة وحيدة من الفراغ (غير مركز الكرة الأرضية) يمر بها دائماً خط عمل وزن هذا الجسم وتكون ثابتة بالنسبة لهذا الجسم مهما تغير وضع الجسم بالنسبة لسطح الأرض ويرمز لمركز ثقل الجسم الجاسي بالرمز (م)

ملاحظتان

- ① خط عمل وزن الجسم يجب أن يمر بمركز ثقل الجسم وأيضاً يمر بمركز الكرة الأرضية.
- ② مركز ثقل الجسم الجاسئ يكون ثابتاً بالنسبة لهذا الجسم ولكنه لا يكون بالضرورة واقعاً على أحد جسيمات هذا الجسم.

متجه موضع مركز الثقل للجسم الحاسي بالنسبة لنقطة الأصل

إذا كانت : W ، W_1 ، W_2 ، W_3 ، W_4 ، W_5 ، W_6 ، W_7 ، W_8 ، W_9 ، W_{10} ، W_{11} ، W_{12} ، W_{13} ، W_{14} ، W_{15} ، W_{16} ، W_{17} ، W_{18} ، W_{19} ، W_{20} ، W_{21} ، W_{22} ، W_{23} ، W_{24} ، W_{25} ، W_{26} ، W_{27} ، W_{28} ، W_{29} ، W_{30} ، W_{31} ، W_{32} ، W_{33} ، W_{34} ، W_{35} ، W_{36} ، W_{37} ، W_{38} ، W_{39} ، W_{40} ، W_{41} ، W_{42} ، W_{43} ، W_{44} ، W_{45} ، W_{46} ، W_{47} ، W_{48} ، W_{49} ، W_{50} ، W_{51} ، W_{52} ، W_{53} ، W_{54} ، W_{55} ، W_{56} ، W_{57} ، W_{58} ، W_{59} ، W_{60} ، W_{61} ، W_{62} ، W_{63} ، W_{64} ، W_{65} ، W_{66} ، W_{67} ، W_{68} ، W_{69} ، W_{70} ، W_{71} ، W_{72} ، W_{73} ، W_{74} ، W_{75} ، W_{76} ، W_{77} ، W_{78} ، W_{79} ، W_{80} ، W_{81} ، W_{82} ، W_{83} ، W_{84} ، W_{85} ، W_{86} ، W_{87} ، W_{88} ، W_{89} ، W_{90} ، W_{91} ، W_{92} ، W_{93} ، W_{94} ، W_{95} ، W_{96} ، W_{97} ، W_{98} ، W_{99} ، W_{100} ، W_{101} ، W_{102} ، W_{103} ، W_{104} ، W_{105} ، W_{106} ، W_{107} ، W_{108} ، W_{109} ، W_{110} ، W_{111} ، W_{112} ، W_{113} ، W_{114} ، W_{115} ، W_{116} ، W_{117} ، W_{118} ، W_{119} ، W_{120} ، W_{121} ، W_{122} ، W_{123} ، W_{124} ، W_{125} ، W_{126} ، W_{127} ، W_{128} ، W_{129} ، W_{130} ، W_{131} ، W_{132} ، W_{133} ، W_{134} ، W_{135} ، W_{136} ، W_{137} ، W_{138} ، W_{139} ، W_{140} ، W_{141} ، W_{142} ، W_{143} ، W_{144} ، W_{145} ، W_{146} ، W_{147} ، W_{148} ، W_{149} ، W_{150} ، W_{151} ، W_{152} ، W_{153} ، W_{154} ، W_{155} ، W_{156} ، W_{157} ، W_{158} ، W_{159} ، W_{160} ، W_{161} ، W_{162} ، W_{163} ، W_{164} ، W_{165} ، W_{166} ، W_{167} ، W_{168} ، W_{169} ، W_{170} ، W_{171} ، W_{172} ، W_{173} ، W_{174} ، W_{175} ، W_{176} ، W_{177} ، W_{178} ، W_{179} ، W_{180} ، W_{181} ، W_{182} ، W_{183} ، W_{184} ، W_{185} ، W_{186} ، W_{187} ، W_{188} ، W_{189} ، W_{190} ، W_{191} ، W_{192} ، W_{193} ، W_{194} ، W_{195} ، W_{196} ، W_{197} ، W_{198} ، W_{199} ، W_{200} ، W_{201} ، W_{202} ، W_{203} ، W_{204} ، W_{205} ، W_{206} ، W_{207} ، W_{208} ، W_{209} ، W_{210} ، W_{211} ، W_{212} ، W_{213} ، W_{214} ، W_{215} ، W_{216} ، W_{217} ، W_{218} ، W_{219} ، W_{220} ، W_{221} ، W_{222} ، W_{223} ، W_{224} ، W_{225} ، W_{226} ، W_{227} ، W_{228} ، W_{229} ، W_{230} ، W_{231} ، W_{232} ، W_{233} ، W_{234} ، W_{235} ، W_{236} ، W_{237} ، W_{238} ، W_{239} ، W_{240} ، W_{241} ، W_{242} ، W_{243} ، W_{244} ، W_{245} ، W_{246} ، W_{247} ، W_{248} ، W_{249} ، W_{250} ، W_{251} ، W_{252} ، W_{253} ، W_{254} ، W_{255} ، W_{256} ، W_{257} ، W_{258} ، W_{259} ، W_{260} ، W_{261} ، W_{262} ، W_{263} ، W_{264} ، W_{265} ، W_{266} ، W_{267} ، W_{268} ، W_{269} ، W_{270} ، W_{271} ، W_{272} ، W_{273} ، W_{274} ، W_{275} ، W_{276} ، W_{277} ، W_{278} ، W_{279} ، W_{280} ، W_{281} ، W_{282} ، W_{283} ، W_{284} ، W_{285} ، W_{286} ، W_{287} ، W_{288} ، W_{289} ، W_{290} ، W_{291} ، W_{292} ، W_{293} ، W_{294} ، W_{295} ، W_{296} ، W_{297} ، W_{298} ، W_{299} ، W_{300} ، W_{301} ، W_{302} ، W_{303} ، W_{304} ، W_{305} ، W_{306} ، W_{307} ، W_{308} ، W_{309} ، W_{310} ، W_{311} ، W_{312} ، W_{313} ، W_{314} ، W_{315} ، W_{316} ، W_{317} ، W_{318} ، W_{319} ، W_{320} ، W_{321} ، W_{322} ، W_{323} ، W_{324} ، W_{325} ، W_{326} ، W_{327} ، W_{328} ، W_{329} ، W_{330} ، W_{331} ، W_{332} ، W_{333} ، W_{334} ، W_{335} ، W_{336} ، W_{337} ، W_{338} ، W_{339} ، W_{340} ، W_{341} ، W_{342} ، W_{343} ، W_{344} ، W_{345} ، W_{346} ، W_{347} ، W_{348} ، W_{349} ، $$

சிங்கம்

مجموع عزوم هذه الأوزان حول نقطة الأصل = عزم المحصلة حول نفس النقطة.

ومنها يمكن استنتاج أن :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \dots + 1 + 1) =$$

$$(1) \frac{\overrightarrow{v_1} + \dots + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_1}}{v_1 + \dots + v_2 + v_1} = \overrightarrow{v_1}$$

$$s_1 = 1.5$$

.....

$$s_{\text{rel}} = s_{\text{rel}}$$

(7)

الوحدة 6

حيث L_1, L_2, \dots, L_n هي كتل الجسيمات المكونة للجسم الجاسئ وبالتعويض من (٢) في (١) وقسمة كل من البسط والمقام على L_n

$$\therefore \frac{L_1 \bar{x}_1 + L_2 \bar{x}_2 + \dots + L_n \bar{x}_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} = \bar{x}_n$$

ويمكن أن نكتب هذه العلاقة بدلالة المركبات في اتجاه محوري الإحداثيين المتعامدين \bar{x} و \bar{y} كما يلي :

$$\frac{L_1 \bar{x}_1 + L_2 \bar{x}_2 + \dots + L_n \bar{x}_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} = \bar{x}_n$$

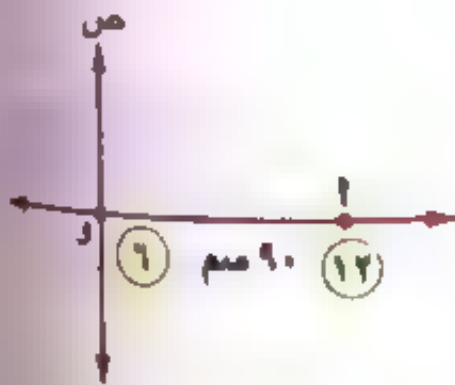
$$\therefore \frac{L_1 \bar{y}_1 + L_2 \bar{y}_2 + \dots + L_n \bar{y}_n}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} = \bar{y}_n$$

مثال ١

جسمان ماديان كتلتاهما ٦ كجم ، ١٢ كجم والمسافة بينهما ٩٠ سم أوجد مركز ثقل الجسمين بالنسبة للجسم ٦ كجم.

الحل

اعتبر أن الخط الواصل بين مركزي ثقل الجسمين يقع على محور السينات وأن مركز ثقل الجسم ٦ كجم يقع عند نقطة الأصل $(0, 0)$ ومركز ثقل الكتلة ١٢ كجم يقع عند $(90, 0)$



$$\therefore \bar{x}_n = \frac{L_1 \bar{x}_1 + L_2 \bar{x}_2}{L_1 + L_2} = \frac{0 \times 6 + 90 \times 12}{6 + 12} = 60 \text{ سم}$$

$$\bar{y}_n = \frac{L_1 \bar{y}_1 + L_2 \bar{y}_2}{L_1 + L_2} = \frac{0 \times 12 + 0 \times 6}{12 + 6} = 0$$

\therefore مركز الثقل $M = (60, 0)$

أي أن : مركز ثقل الجسمين يقع على بُعد ٦٠ سم من الجسم ٦ كجم.

ملاحظة

مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة ل يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة الكتلتين.

الدرس الاول



نفس أن م هي مركز ثقل الجسمين

∴ مركز ثقل الجسمين يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسبة عكسية لنسبة الكتلتين.

$$∴ 2 = 12 = 6$$

$$∴ 2 = 12 = 6$$

$$∴ 2 = 12 = 6$$

$$∴ 2 = 12 = 6$$

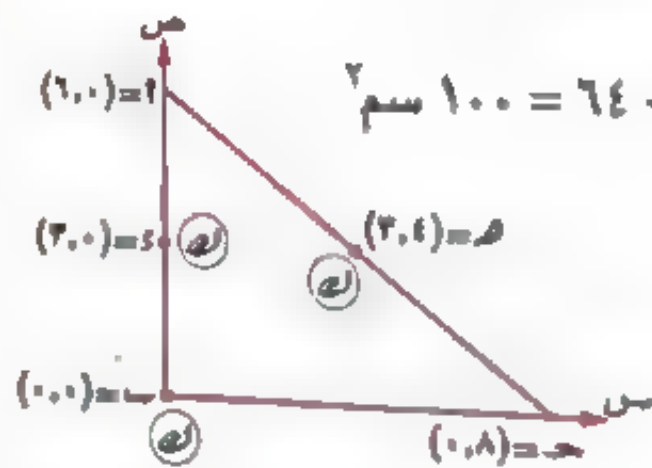
$$∴ 2 = 12 = 6$$

∴ مركز الثقل يبعد عن الجسم 6 كجم مسافة 6 سم

مثال 1

أب ح مثلث فيه : أ ب = 6 سم ، ب ح = 8 سم ، ح أ = 10 سم ، د منتصف أ ب ، هـ وسط ب ح ، و وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها (ك) عند النقاط ب ، د ، هـ ، أوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث.

الحل



$$∴ (أ) = 6 سم ، (ب) = 8 سم ، (ح) = 10 سم ، د منتصف أ ب ، هـ وسط ب ح ، و وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها (ك) عند النقاط ب ، د ، هـ ، أوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث.$$

∴ أ ب ح قائم الزاوية في ب

نختار اتجاهين متعامدين ب ب ، ب ب

ونلك باعتبار أن ب هي نقطة الأصل

$$∴ (أ) = 6 سم ، (ب) = 8 سم ، (ح) = 10 سم ، د منتصف أ ب ، هـ وسط ب ح ، و وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها (ك) عند النقاط ب ، د ، هـ ، أوجد مركز ثقل هذه الكتل الثلاث.$$

ويستحسن أن ننشئ الجدول الآتي لبيان الكتل المكونة للمجموعة وإحداثيات كل منها :

عند ب	عند د	عند هـ	الكتلة
ك	ك	ك	الإحداثي السيني (ب)
0	0	0	الإحداثي الصادي (ب)
0	3	2	

الوحدة 6

لاحظ أنه

إذا اعتبرنا \vec{b} و \vec{a} محوري إحداثيات موجبين فإن مركز الثقل $= (\frac{4}{3}, 2)$ وعند تغيير محاور الإحداثيات سوف يتغير إحداثيي مركز الثقل.

$$\therefore \text{مركز الثقل م} = (\frac{4}{3}, 2)$$

ويكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

$$\bar{x} = \frac{4 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0}{0 + 0 + 0}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{4}{3} \text{ سم}$$

$$\bar{y} = \frac{2 \times 0 + 2 \times 0 + 0 \times 0}{0 + 0 + 0}$$

$$\therefore \bar{y} = 2 \text{ سم}$$

مثال ٣

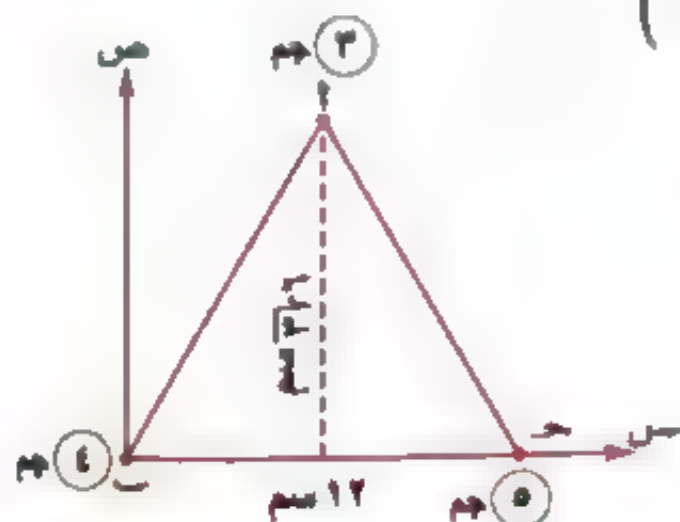
أ ب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم وضعت الكتل ٣ ، ٤ ، ٥ جرام عند الرؤوس ١ ، ٢ ، ٣ على الترتيب. عيّن مركز ثقل المجموعة.

الحل

نختار اتجاهين متعامدين \vec{b} و \vec{a} كما بالشكل وذلك باعتبار أن \vec{b} هي نقطة الأصل

$$\vec{b} = (0, 0), \vec{a} = (0, 12), \vec{c} = (3\sqrt{3}, 6)$$

ونكون جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلي :



ح	ب	١	
٥	٤	٣	ك
١٢	٠	٦	س
٠	٠	٣\sqrt{3}	ص

$$\text{وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي : } \bar{x} = \frac{12 \times 0 + 0 \times 4 + 6 \times 3}{0 + 4 + 3}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{18}{7} \text{ سم}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3\sqrt{3} \times 18}{12}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{18}{7} \text{ سم}$$

$$\bar{y} = \frac{0 \times 0 + 0 \times 4 + 3\sqrt{3} \times 6}{0 + 4 + 3}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{3\sqrt{3} \times 2}{7} \text{ سم}$$

لاحظ أنه

نعلم أن مركز ثقل أي جسم هو نقطة ثابتة لا يتغير موضعها بتغير وضع الجسم ولكن يتغير إحداثيا مركز الثقل بتغير المحاور المتعامدة حيث إن محاور الإحداثيات المتعامدة اختيارية.

$$\therefore \text{مركز الثقل م للمجموعة} = (\frac{18}{7}, \frac{3\sqrt{3} \times 2}{7})$$

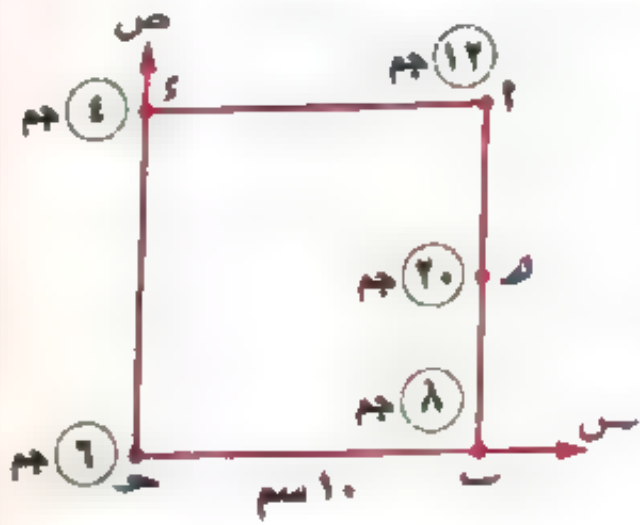
بالنسبة للنقطة «ب»

مثال ٤

أب ح د مربع طول ضلعه ١٠ سم ثبتت الكتل ١٢ ، ٨ ، ٦ ، ٤ جم عند رؤوسه
١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على الترتيب كما تثبت كتلة ٢٠ جم عند منتصف \overline{AB} عُنْ مركز ثقل المجموعة.

الحل

نختار اتجاهين متعامدين ح س ، ح ص كما بالشكل ثم نكوّن جدول كتل المجموعة
واحداثياتها كما يلي :



ك	١	٢	٣	٤	٥
ك	١٢	٨	٦	٤	٢٠
س	١٠	١٠	٠	٠	١٠
ص	١٠	٠	٠	١٠	٥

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

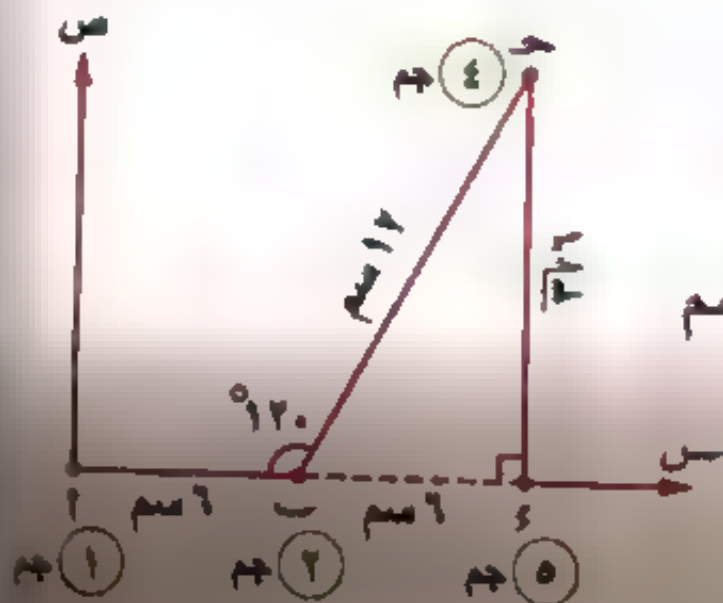
$$\begin{aligned} \text{سم } ٨ = \frac{٤٠٠}{٥٠} &= \frac{١٠ \times ٢٠ + ٠ \times ٤ + ٠ \times ٦ + ١٠ \times ٨ + ١٠ \times ١٢}{٢٠ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٢} = \text{سم } ٨ \\ \text{ص } ٥,٢ = \frac{٢٦٠}{٥٠} &= \frac{٥ \times ٢٠ + ١٠ \times ٤ + ٠ \times ٦ + ٠ \times ٨ + ١٠ \times ١٢}{٢٠ + ٤ + ٦ + ٨ + ١٢} = \text{ص } ٥,٢ \\ \therefore \text{م} &= (٨, ٥,٢) \text{ بالنسبة للنقطة «ح»} \end{aligned}$$

مثال ٥

ثبتت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ جم عند النقط ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥
على الترتيب من الخط المنكسر ١ ح د الموضح بالشكل المقابل
حيث $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ ، $\angle (د أ ب ح) = ١٢٠^\circ$
أوجد مركز ثقل المجموعة.



الحل



$$\begin{aligned} \therefore \angle (د أ ب ح) &= ١٢٠^\circ \quad \therefore \angle (د ح ب) = ٦٠^\circ \\ \therefore \angle (د ب ح) &= ٣٠^\circ \quad \therefore \frac{١}{٢} = \frac{٤}{٦} = \frac{٥}{٦} \\ \therefore \text{سم } ٦ &= \frac{١}{٢} \times ٦ = ٣ \end{aligned}$$

6 الوحدة

ل	س	ص	ح	ب	ا
٥	١٢	٠	٤	٢	١
١٢	٠	٠	١٢	٦	٠
٠	٠	٠	٢٧٦	٠	٠

نختار اتجاهين متعامدين \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} كما بالشكل ثم نكون جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلي وذلك باعتبار

\vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} اتجاهين متعامدين

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

$$\bar{x}_M = \frac{12 \times 0 + 12 \times 4 + 6 \times 2 + 0 \times 1}{12 + 12 + 6 + 0} = \frac{120}{30} = 4 \text{ سم}$$

$$\bar{y}_M = \frac{0 \times 0 + 276 \times 4 + 0 \times 2 + 0 \times 1}{0 + 4 + 2 + 1} = \frac{1104}{7} \approx 157.71 \text{ سم}$$

$$\therefore M = (4, 157.71) \text{ بالنسبة للنقطة «ا»}$$

مثال ٦

وضعت أثقال مقاديرها ٥، ٤، ٦، ٢، ٧، ٣ ثقل جم عند الرؤوس المتتالية لسداسي منتظم أثبت أن مركز ثقل المجموعة يقع في المركز الهندسي للسداسي.

الحل

نفرض أن السداسي هو $ABCDEF$ و

ونختار الاتجاهين المتعامدين \vec{a} ، \vec{b} ، \vec{c} ، \vec{d} حيث M مركز السداسي

ونفرض طول ضلع السداسي = l وأن الكتل مثبتة على الترتيب

عند الرؤوس A, B, C, D, E, F و

$$\text{حيث } A = \left(\frac{\sqrt{3}l}{2}, \frac{l}{2}\right), B = (0, l), C = \left(\frac{\sqrt{3}l}{2}, \frac{l}{2}\right), D = \left(\frac{\sqrt{3}l}{2}, -\frac{l}{2}\right), E = (0, -l), F = \left(\frac{\sqrt{3}l}{2}, -\frac{l}{2}\right)$$

$$\text{ونكون الجدول الآتي:}$$

ل	س	ص	ح	ب	ا
٥	١٢	٠	٤	٢	١
١٢	٠	٠	١٢	٦	٠
٠	٠	٠	٢٧٦	٠	٠

تتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

$$M_x = \frac{\left(\frac{J}{Y} -\right) \times 2 + (J -) \times 7 + \left(\frac{J}{Y} -\right) \times 2 + \frac{J}{Y} \times 6 + J \times 4 + \frac{J}{Y} \times 5}{2 + 7 + 2 + 6 + 4 + 5} = \frac{0}{27} = 0$$

$$M_y = \frac{\frac{3J}{2} \times 2 + 0 \times 7 + \left(\frac{3J}{2} -\right) \times 2 + \left(\frac{3J}{2} -\right) \times 6 + 0 \times 4 + \frac{3J}{2} \times 5}{2 + 7 + 2 + 6 + 4 + 5} = \frac{0}{27} = 0$$

∴ م = (0, 0) ∴ مركز ثقل المجموعة يقع في المركز الهندسي للسداسي المنتظم.

الجسم المنتظم الكثافة

هو الجسم الذي تكون كتلة وحدة الأطوال أو المساحات أو الحجوم المأخوذة من أى جزء منه ثابتة.

ملاحظات

- * إذا كان السلك (أو القضيب) منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع طوله.
- * إذا كانت الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة فإن وزنها يتناسب مع مساحتها.
- * إذا كان الجسم منتظم الكثافة فإن وزنه يتناسب مع حجمه.

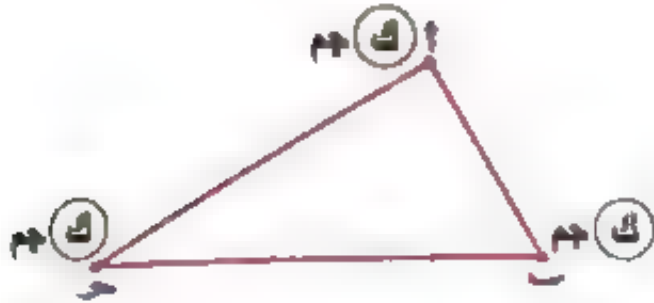
مراكز ثقل بعض الأجسام الجاسئة البسيطة

- ① مركز ثقل قضيب منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصفه.
- ② مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل متوازي الأضلاع أو أحد حالاته الخاصة (المربع - المستطيل - المعين) يقع عند مركزها الهندسي (نقطة تقاطع القطرين).
- ③ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بمثلث يقع عند نقطة تلاقي متوسطات هذا المثلث (هي نقطة تقسم المتوسط من الداخل بنسبة ٢ : ١ من جهة القاعدة).
- ④ مركز ثقل سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث لا يقع عند نقطة تلاقي متوسطات المثلث إلا إذا كان المثلث متساوي الأضلاع.
- ⑤ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بدائرة يقع في مركز الدائرة.
- ⑥ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بشكل سداسي منتظم يقع عند مركز السداسي.

ملاحظة هامة

مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث.

* ففي الشكل المقابل :



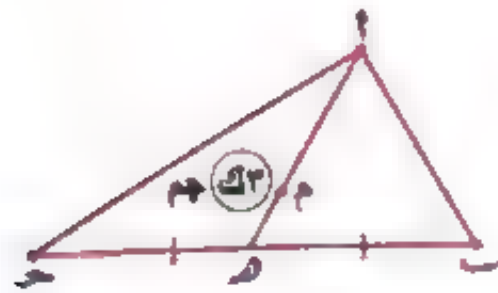
إذا وضعت ثلاثة كتل متساوية كتلة كل منها (ع) جم مثلاً عند الرؤوس أ، ب، ج من ΔABC

فإن مركز ثقل هذه الكتل يقع عند ملتقى متوسطات

المثلث أي أنه ينطبق على مركز ثقل صفيحة رقيقة

منتظمة الكثافة على هيئة هذا المثلث وكتلتها = (ع ٢) جم

والعكس صحيح : (فكرة التوزيع)



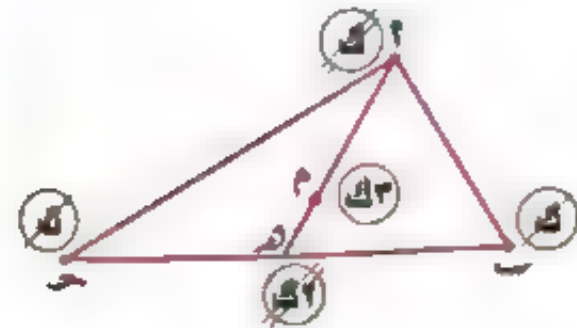
إذا كانت كتلة صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة = (ع ٢) جم وتؤثر في نقطة تلاقي المتوسطات فإنه يمكن استبدالها بثلاث كتل متساوية كتلة كل منها = (ع) جم موضوعة عند رؤوس المثلث.

الإثبات :

∴ مركز ثقل الكتلتين (ع) عند ج ، (ع) عند ب

هو مركز ثقل كتلة مقدارها (ع ٢) وتؤثر في

نقطة ه منتصف ج ب



∴ مركز ثقل الكتلتين (ع) عند ج ، (ع ٢) عند ه هو مركز ثقل كتلة مقدارها (ع ٢) وتؤثر في نقطة م $\exists \overline{AM}$ حيث $ع \times م١ = ع٢ \times م٢$

∴ $م١ = ع٢$ ∴ $م١ : م٢ = ع٢ : ع$

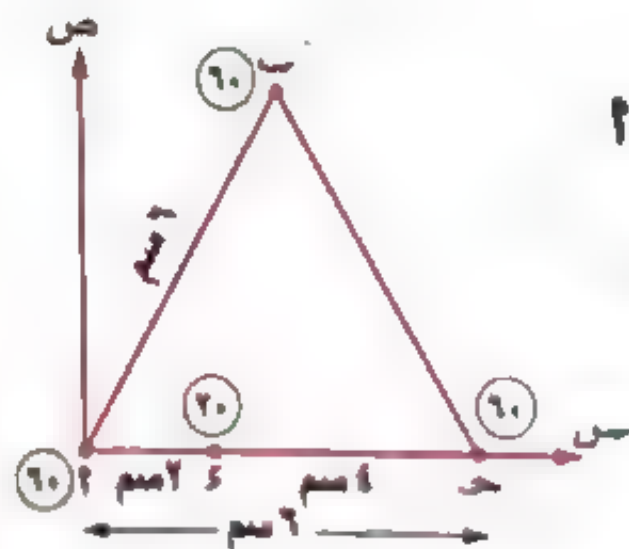
∴ $١ : ٢ = م٢ : م١$

∴ م هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث

أي أن : مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث ينطبق مع مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمثلث.

صفحة رقيقة منتظمة كتلتها ١٨٠ جرام على شكل مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٦ سم
الصفحة كتلة قدرها ٢٠ جرام عند نقطة $\bar{A} \in \bar{BC}$ بحيث : $AB = ٢$ سم. عيّن مركز ثقل المجموعة.

الحل



نختار الاتجاهين المتعامدين \bar{AS} ، \bar{AS} بحيث تكون نقطة A

في نقطة الأصل نستعويض عن كتلة الصفحة وهي ١٨٠ جم

بثلاث كتل متساوية مقدار كل منها $\frac{180}{3}$ أي ٦٠ جم

مُثبتة عند رؤوس المثلث فتصبح المجموعة المكافئة مكونة

من أربعة كتل موضوعة عند النقط A ، B ، C ، S حيث : $A = (0, 0)$

$B = (6 \text{ م.أ. } 60^\circ, 6 \text{ م.أ. } 60^\circ) = (3\sqrt{3}, 3)$ ، $C = (0, 6)$ ، $S = (0, 2)$

ثم نكوّن جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلي :

	A	B	C	S
الكتلة	٦٠	٦٠	٦٠	٢٠
س	٠	٣	٦	٢
ص	٠	$3\sqrt{3}$	٠	٠

$$\therefore \text{س م} = \frac{2 \times 20 + 6 \times 60 + 3 \times 60 + 0 \times 60}{20 + 60 + 60 + 60} = ٢,٩ \text{ سم}$$

$$\text{ص م} = \frac{0 \times 20 + 0 \times 60 + 3\sqrt{3} \times 60 + 0 \times 60}{20 + 60 + 60 + 60} = \frac{3\sqrt{3}}{١٠} \text{ سم}$$

$$\therefore M = (2,9, \frac{3\sqrt{3}}{10}) \text{ بالنسبة للنقطة } A$$

دل آخر :

بدلاً من توزيع كتلة المثلث عند رؤوسه يمكننا تعيين مركز ثقل المثلث M (نقطة تقاطع المتوسطات)

$$\text{حيث } M = (\frac{0 + 3\sqrt{3} + 0}{3}, \frac{6 + 3 + 0}{3}) = (3\sqrt{3}, 3)$$

تذكر أن

ثم نكوّن جدول كتل المجموعة وإحداثياتها :

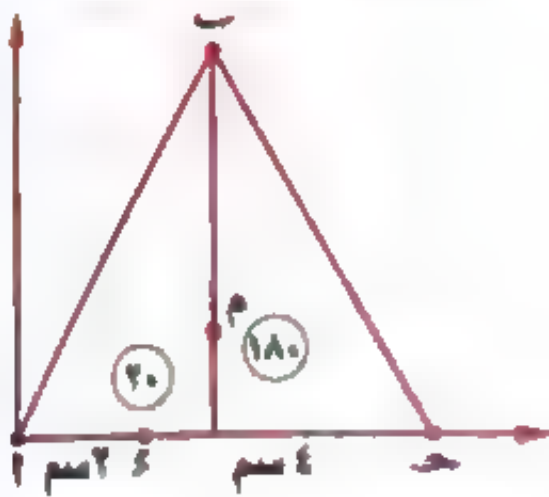
س	ص	م
٢٠	١٨٠	٢
٢	٣	٣٧
٠	٣٧	٢

$$\therefore \text{س} = \frac{2 \times 20 + 3 \times 180}{20 + 180}$$

$$= 2,9 \text{ سم}$$

$$\text{ص} = \frac{2 \times 20 + 37 \times 180}{20 + 180} = \frac{6740}{200} = 33,7 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{م} = (33,7, 2,9)$$



مثال ٨

صفحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل المثلث ١ ب ح وكتلتها ١٨ جم ثبتت الكتلتان ١٠ ، ٤ جرام عند الرأسين ١ ، ب كما ثبتت كتلة قدرها ٨ جم عند منتصف ا ح أثبت أن مركز ثقل المجموعة ينطق على نقطة منتصف المستقيم المتوسط ا ب

الحل

نستعيز عن كتلة الصفحة بثلاث كتل متساوية

مقدار كل منها $= \frac{18}{3} = 6$ جرام عند رؤوس المثلث

وكذلك الكتلة ٨ جم تُستبدل بكتلتين مقدار كل منها $= \frac{8}{2} = 4$ جم

عند الرأسين ١ ، ح وتصبح الكتل المثبتة كما بالشكل ١

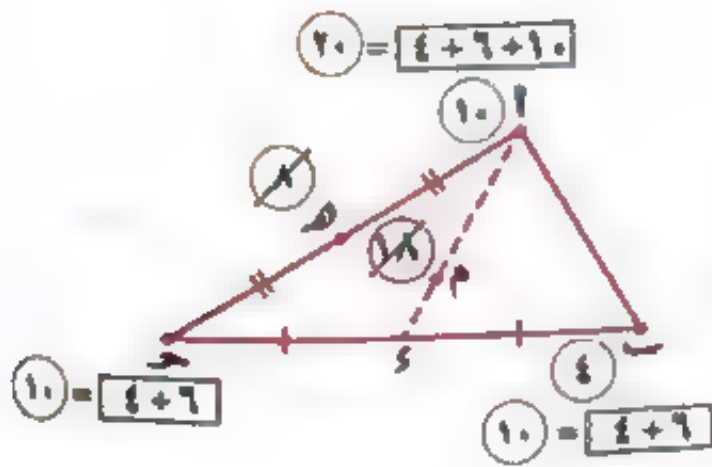
الكتلتان ١٠ جم ، ٤ جم عند ب ، ح يستعاض عنهما

بكتلة ٢٠ جم عند د منتصف ب ح كما هو واضح بالشكل رقم ٢

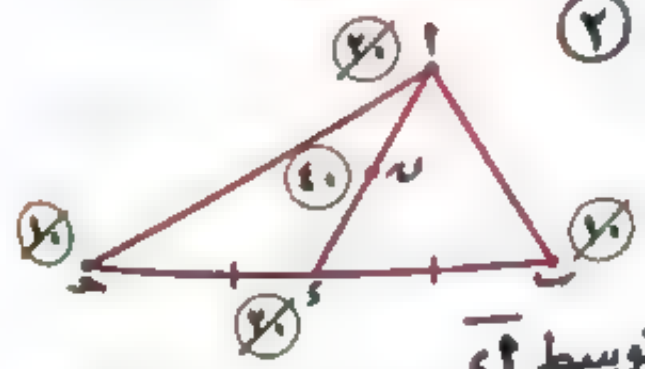
، الكتلتين ٢٠ جم عند ١ ، ٢٠ جم عند د يستعاض عنهما

بكتلة ٤٠ جم عند ه منتصف ا د حيث ه مركز ثقل المجموعة

\therefore مركز ثقل المجموعة ينطبق على نقطة منتصف المستقيم المتوسط ا ب



شكل ١

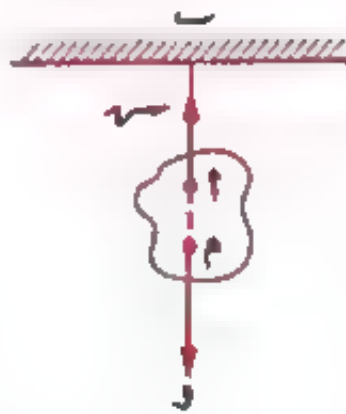


شكل ٢

التعليق الحر للجسم الجاسي

في الشكل المقابل :

إذا فرضنا جسمًا جاسيًا وزنه (و) ومركز ثقله م مُعلق تعليقًا حرًا من إحدى نقطه (أ) بواسطة خيط في نقطة تعليق ب



وعندما يتزن الجسم يكون واقعًا تحت تأثير قوتين :

① قوة وزن الجسم (و) وتؤثر رأسيًا لأسفل.

② قوة الشد (ت) ←

∴ الجسم متزن

$$\therefore \vec{T} + \vec{W} = \vec{0} \quad \therefore \vec{T} = -\vec{W}$$

أي أن : قوة الشد تكون موجهة رأسيًا لأعلى

وهذا معناه أن الخيط في وضع الاتزان يكون رأسيًا ويكون $\vec{T} = \vec{W}$

وأيضًا يجب أن ينطبق خطا عمل قوتي الوزن والشد ولذلك

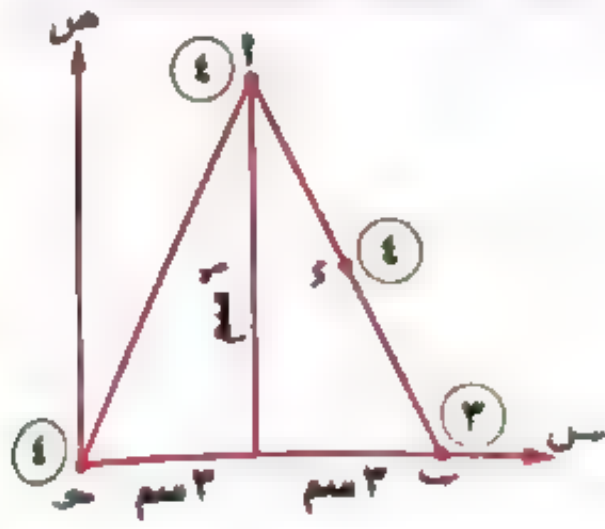
نجد أن

مركز ثقل الجسم الجاسي المعلق تعليقًا حرًا يقع على الخط المستقيم الرأسى المار بنقطة التعليق.

مثال ١

صفحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣ كجم على هيئة المثلث أ ب ح الذي فيه : أ ب = أ ح
 أ ب ح = طول ارتفاع المثلث يساوي ٦ سم تُثبت الكتل ٣ ، ٢ ، ٣ كجم عند أ ، ب ، ح
 ح ، ومنتصف أ ب على الترتيب. عيّن مركز ثقل المجموعة وأثبت أنه يبعد عن ح مسافة ٤ سم
 وإذا علقت الصفحة من ح تعليقًا حرًا، فأوجد في وضع الاتزان قياس زاوية ميل كل من :
 ح ب ، ح أ على الرأسى.

الحل



نرسم $\overline{ح\text{ص}}$ \perp $\overline{ح\text{ب}}$

ونختار الاتجاهين المتعامدين $\overline{ح\text{ص}}$ ، $\overline{ح\text{ب}}$

بحيث تكون نقطة $ح$ هي نقطة الأصل نستعويض عن كتلة

الصفحة وهي ٢ كجم بثلاث كتل متساوية مقدار كل منها

١ كجم مثبتة عند رؤوس المثلث وبذلك تصبح الكتل المثبتة عند ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ منتصف $\overline{أ\text{ب}}$

هي ٤ ، ٢ ، ٤ ، ٤ كجم

حيث : ١ = (٦ ، ٢) ، ٢ = (٠ ، ٦) ، ٣ = (٠ ، ٠) ، ٤ = (٢ ، ٤ $\frac{1}{2}$)

ثم نكون جدول كتل المجموعة وإحداثياتها كما يلي :

	١	٢	٣	٤
ل	٤	٢	٤	٤
س	٢	٦	٠	٤ $\frac{1}{2}$
ص	٦	٠	٠	٢

$$\frac{١٨ + ١٨ + ١٢}{١٥} = \text{س م} \therefore$$

$$\therefore \text{س م} = \frac{٤,٥ \times ٤ + ٠ \times ٤ + ٦ \times ٢ + ٢ \times ٤}{٤ + ٤ + ٢ + ٤}$$

$$\therefore \text{س م} = ٣,٢ \text{ سم} ، \text{ ص م} = \frac{٢ \times ٤ + ٠ \times ٤ + ٠ \times ٢ + ٦ \times ٤}{٤ + ٤ + ٢ + ٤}$$

$$\therefore \text{ص م} = \frac{١٢ + ٢٤}{١٥}$$

$$\therefore \text{م} = (٢, ٤ ، ٣, ٢)$$

$$\therefore \text{ص م} = ٢,٤ \text{ سم}$$

، بُعد مركز الثقل م عن $ح = م = \sqrt{(٢,٤)^2 + (٣,٢)^2} = ٤ \text{ سم}$ (المطلوب أولاً)

إيجاد قياس زاوية ميل $\overline{ح\text{ب}}$ على الرأسى :

نرسم $\overline{ح\text{م}}$ فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة

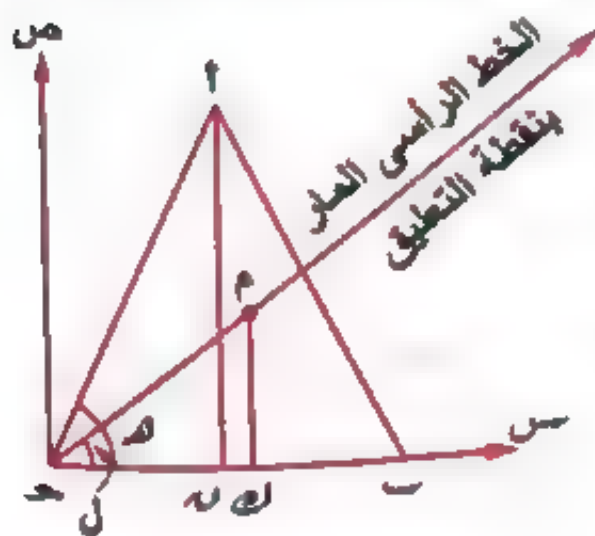
التعليق (ح) ونفرض أن ل هي قياس زاوية ميل

$\overline{ح\text{ب}}$ على $\overline{ح\text{م}}$ ونرسم $\overline{ل\text{م}}$ \perp $\overline{ح\text{ب}}$

$$\therefore \text{طال} = \frac{\text{ل م}}{\text{ح م}}$$

$$\therefore \text{طال} = \frac{٢,٤}{٣,٢} = \frac{٢}{٤}$$

$$\therefore \text{ل} = ٣٦,٥٢^\circ$$



إيجاد قياس زاوية ميل $\overline{ح أ}$ على الرأسى :

نحسب قياس $\angle د أ ح$ ولتكن $هـ$ وذلك من $\Delta هـ أ ح$

$$\text{حيث : } \angle هـ أ ح = \frac{ص أ}{ح أ} = \frac{6}{4} = 1.5 \quad \therefore \angle هـ أ ح = 56.3^\circ$$

$$\therefore \text{ قياس زاوية ميل } \overline{ح أ} \text{ على الرأسى } \angle ح أ م = \angle هـ أ ح - \angle د أ ح = 56.3^\circ - 30.2^\circ = 26.1^\circ$$

(المطلوب ثانياً)

حل آخر :

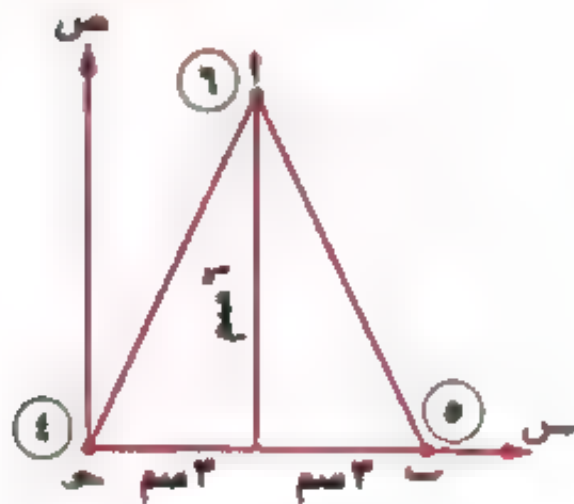
نستعويض عن كتلة الصفيحة وهي ٢ كجم بثلاث كتل متساوية

مقدار كل منها ١ كجم مثبتة عند رؤوس المثلث

وكذلك نستعويض عن الكتلة ٤ كجم المثبتة عند منتصف

$\overline{أ ب}$ بكتلتين مقدار كل منهما ٢ كجم مثبتة عند $أ$ ، $ب$

وبذلك تكون الكتل عند $أ$ ، $ب$ ، $ح$ كما بالشكل المقابل :



ح	ب	أ	
٤	٥	٦	ل
٠	٦	٢	س
٠	٠	٦	ص

$$\therefore \text{ س م} = \frac{٠ \times ٤ + ٦ \times ٥ + ٢ \times ٦}{٤ + ٥ + ٦} = ٣.٢ \text{ سم}$$

ثم نكمل الحل

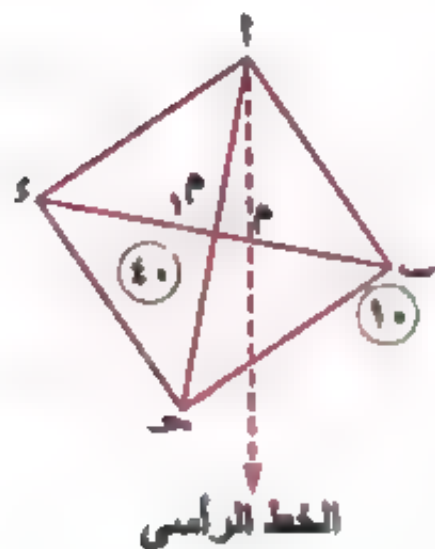
$$\text{، ص م} = \frac{٠ \times ٤ + ٠ \times ٥ + ٦ \times ٦}{٤ + ٥ + ٦} = ٢.٤ \text{ سم}$$

مثال ١٠

صفيحة رقيقة منتظمة على شكل متوازي الأضلاع $أ ب ح د$ الذي فيه :
 $أ ب = ٤٠ \text{ سم}$ ، $ب ح = ٢٠ \text{ سم}$ ، $\angle د ب ح = ٩٠^\circ$ علقت الصفيحة من نقطة
 $(هـ)$ على $\overline{ح د}$ فارتزنت عندما كان $\overline{ح د}$ أفقياً. أوجد طول $\overline{ح هـ}$

عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها ٤٠ ثقل جرام تعليقاً حُرّاً من الرأس ١ وثبتت عند الرأس ٢ ثقل قدره ١٠ ثقل جرام. أثبت أن ظل زاوية ميل القطر ١ ح على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{1}{5}$

الحل



ليكن م مركز ثقل الصفيحة وهو عند نقطة تلاقى قطريها ، م هو مركز ثقل المجموعة المكونة من الصفيحة والثقل عند ٢ عند وضع الاتزان تكون نقطة م واقعة على الخط الرأسى المار بنقطة التعليق ١ (كما بالشكل) وأيضاً تكون $M \in \overline{12}$ بحيث :

$$10 \times م = 40 \times م \quad \therefore م = \frac{4}{3} م \quad \therefore م = \frac{4}{3} م$$

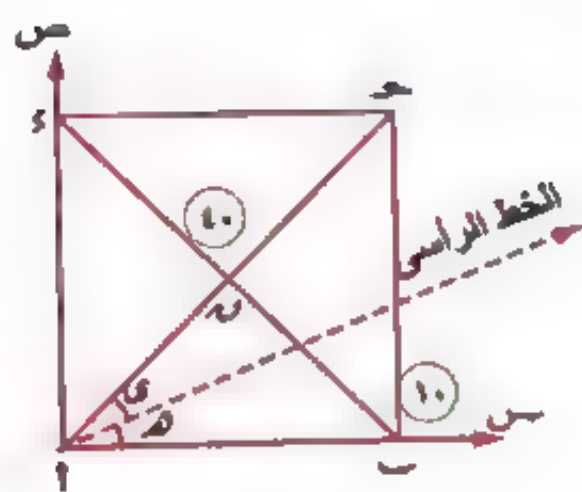
$$10 \times م = 40 \times م \quad \therefore م = \frac{4}{3} م \quad \therefore م = \frac{4}{3} م$$

وبفرض أن : فى $\Delta ١٢م$

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{3} = \text{طام} \quad \therefore \text{طام} = \frac{4}{3}$$

\therefore ظل زاوية ميل القطر ١ ح على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{1}{5}$

حل آخر :



نفرض أن طول ضلع المربع = ٢ ل ، ه تقاطع قطريه

ب	ه	
١٠	٤٠	ل
٢ ل	ل	س
٠	ل	ص

$$\therefore س = \frac{ل \times ١٠ + ٢ ل \times ٤٠}{١٠ + ٤٠} = \frac{٩٠ ل}{٥٠} = \frac{٩ ل}{٥} \quad ، \quad ص = \frac{٠ \times ١٠ + ل \times ٤٠}{١٠ + ٤٠} = \frac{٤ ل}{٥}$$

$$\therefore م = \left(\frac{٩ ل}{٥} , \frac{٤ ل}{٥} \right) \quad ، \quad \text{طام} = \frac{\frac{٩ ل}{٥}}{\frac{٤ ل}{٥}} = \frac{٩}{٤}$$

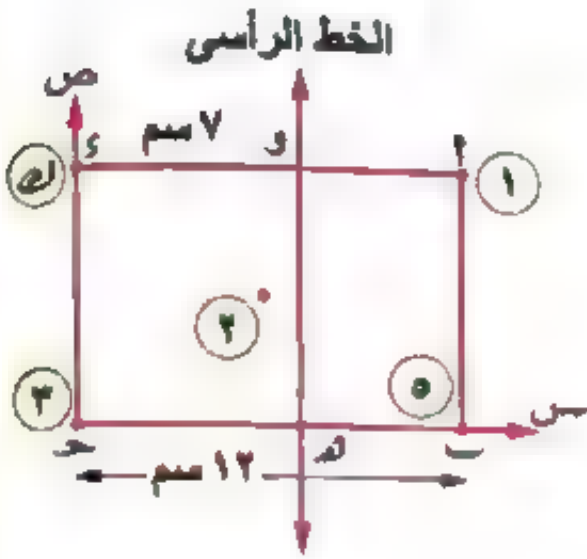
$$\therefore ي = ٤٥^\circ - م$$

$$\therefore \text{طاي} = \text{طا} (٤٥^\circ - م) = \frac{\text{طا} ٤٥^\circ - \text{طام}}{\frac{٩}{٤} + ١} = \frac{\text{طا} ٤٥^\circ - \frac{٩ ل}{٥}}{\frac{١٣ ل}{٥}}$$

مثال ١٣

صفحة رقيقة منتظمة كتلتها ٢ كجم على هيئة مستطيل AB ح D فيه : $AB = 12$ سم ، نُبتت الكتل ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند A ، B ، C ، D على الترتيب. علقت الصفحة تعليقاً حراً من نقطة O على AD بحيث : $OD = 7$ سم فاتزنّت الصفحة بحيث كان AB أفقياً. أوجد قيمة : OC

الحل



∴ الصفحة بما فيها من كتل مُثبتة علقت تعليقاً حراً من نقطة $O \in AD$ بحيث : $OD = 7$ سم واتزنّت بحيث كان AB أفقياً فمعنى ذلك أن الخط الرأسى من نقطة التعليق O يكون عمودياً على AB لذلك نرسم $OM \perp AB$ وبذلك يكون مركز الثقل واقعاً على OM وباعتبار أن OM ، OC ، OB متعامدين ، $AB = L$

$$\text{فيكون الإحداثى السينى لمركز ثقل المجموعة م هو س م حيث : س م = 7 سم}$$

$$\therefore \text{س م} = \frac{6 \times 2 + 0 \times 4 + 0 \times 3 + 12 \times 5 + 12 \times 1}{2 + 4 + 3 + 5 + 1} = 7 \therefore 7 = 4 \times 7 \therefore 84 = 4 \times 7 + 7 \times 7$$

$$\therefore \frac{12 + 6 + 12}{4 + 11} = 7 \therefore 1 = 4 \text{ كجم.}$$

مثال ١٤

AB ح D سلك رفيع منتظم الكثافة فيه : $AB = 12$ سم ، $BC = 2$ سم ، $CD = 12$ سم ثنى السلك عند B ، C بحيث كانت BC (د AB ح) 90° وكان AB ، CD فى جهة واحدة من BC أوجد بُعد مركز الثقل عن كل من A ، B ، C ، D وإذا علق السلك من A تعليقاً حراً فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل AB على الرأسى.

الحل

$$\therefore AB = BC = CD = 12 \text{ سم}$$

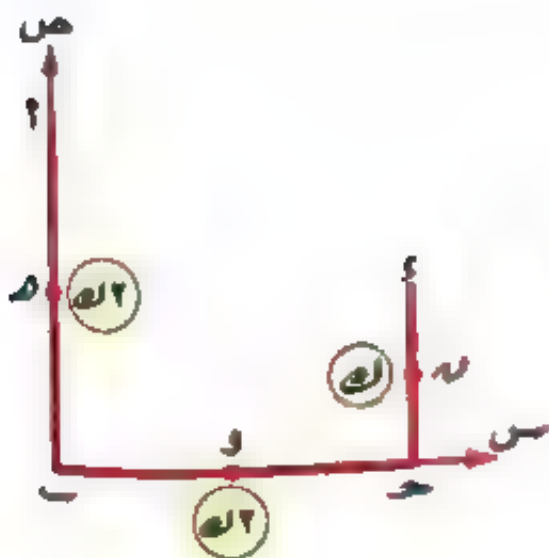
$$\therefore AB = 12 \text{ سم} ، BC = 12 \text{ سم} ، CD = 6 \text{ سم}$$

∴ السلك رفيع ومنتظم الكثافة

∴ يمكن اعتباره مُكوّن من ثلاثة قضبان منتظمة من نفس المادة

وهى AB ، BC ، CD

∴ أوزانها تتناسب مع أطوالها



وحيث أن النسبة بين أطوالها هي ١٢ : ١٢ : ٦ أي ٢ : ٢ : ١ على الترتيب
 ∴ نعتبر كتلتها ٢ ك، ٢ ك، ٢ ك على الترتيب حيث ك ثابت وحيث أن هذه القضبان منتظمة
 ∴ مركز ثقل كل منها عند نقطة منتصفه ففي الشكل يكون ٢ ك عند هـ، ٢ ك عند و، ٢ ك عند هـ
 ونأخذ الاتجاهين المتعامدين بـ ح، بـ ص

فتكون هـ = (٦، ٠)، و = (٠، ٦)، هـ = (٣، ١٢) ونكون الجدول الآتي :

الكتلة	٢ ك	٢ ك	ك
ح	٠	٦	١٢
ص	٦	٠	٣

وتكون إحداثيات مركز ثقل المجموعة هي :

$$س = \frac{٢٤ ك}{٥ ك} = \frac{١٢ \times ك + ٦ \times ٢ ك + ٠ \times ٢ ك}{ك + ٢ ك + ٢ ك} = ٤,٨$$

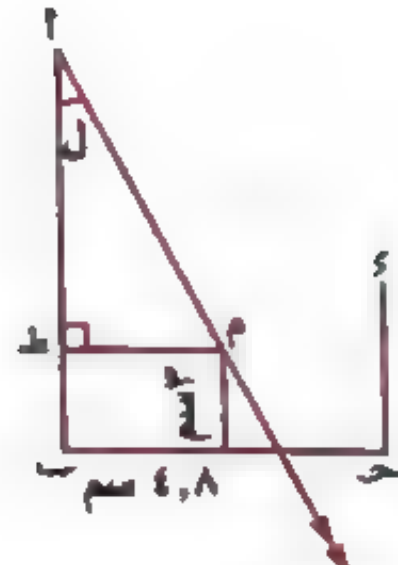
$$ص = \frac{١٥ ك}{٥ ك} = \frac{٣ \times ك + ٠ \times ٢ ك + ٦ \times ٢ ك}{ك + ٢ ك + ٢ ك} = ٣$$

∴ مركز ثقل السلك م = (٣، ٤,٨) وهذا معناه أن مركز ثقل السلك يبعد عن بـ أ مسافة ٤,٨ سم وعن بـ ح مسافة ٣ سم

عند التعليق الحر من أ :

عند التعليق من أ نجد أن \vec{AM} هو الخط الرأسى ولنفرض أن \vec{AB} يصنع مع \vec{AM} زاوية قياسها ل
 ∴ نرسم $\vec{MP} \perp \vec{AB}$ فيكون

$$\frac{٤}{٣} = \frac{٤,٨}{٣} \text{ ولكن } م = ط = ٤,٨ \text{ سم}$$



$$٩ = ٣ - ١٢ = ط - ب = ٩ \text{ سم} \therefore \frac{٨}{١٥} = \frac{٤,٨}{٩} = \frac{٤}{٣} \text{ الخط الرأسى}$$

$$\therefore ل = ٢٨^\circ \therefore \vec{AB} \text{ يميل على الرأسى بزاوية قياسها } ٢٨^\circ$$

مثال ١٥

أب حـ هـ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة حيث أ ب حـ مستطيل فيه : أ ب = ٧ سم
 ب حـ = ١٠,٣ سم، هـ أ ٥ مثلث فيه : هـ أ = ١ هـ و ارتفاع المثلث هو هـ و = ٦ سم
 عيّن موضع مركز ثقل الصفيحة ثم إذا علقت الصفيحة تعليقاً حرّاً من ب
 فأوجد قياس زاوية ميل بـ أ على الرأسى في وضع الاتزان.

الحل

$$\frac{V}{3} = \frac{7 \times 10,2}{6 \times 10,2 \times \frac{1}{4}} = \frac{\text{مساحة سطح المستطيل أ ب ح د}}{\text{مساحة سطح } \Delta م ه س}$$

∴ الصفيحة رقيقة منتظمة الكثافة

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

∴ نعتبر كتلة المستطيل = ٧ ك

فتكون كتلة المثلث = ٢ ك

ونختار الاتجاهين المتعامدين ب ح و س ←

ب ح فتكون كتلة المستطيل = ٧ ك عند

م = (٢,٥ ، ٥,١٥) ، كتلة المثلث = ٣ ك

عند م حيث م = (٧ + ٦/٣ ، ١٠,٢/٣) = (٩ ، ٥,١٥)

ونكون الجدول الآتي :

الكتلة	٧ ك	٣ ك
س	٢,٥	٩
ص	٥,١٥	٥,١٥

وتكون إحداثيات مركز الثقل (م) هي :

$$س م = \frac{٩ \times ٢ + ٢,٥ \times ٧}{٢ + ٧} = ٥,١٥$$

$$ص م = \frac{٥,١٥ \times ٢ + ٥,١٥ \times ٧}{٢ + ٧} = ٥,١٥$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو م = (٥,١٥ ، ٥,١٥)

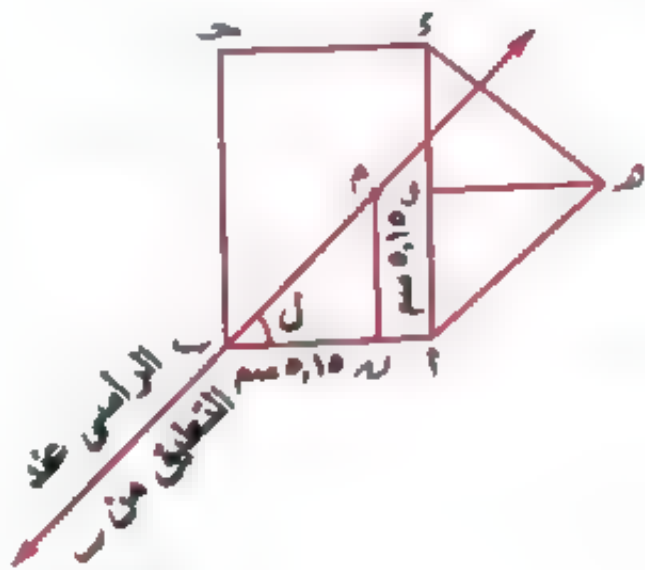
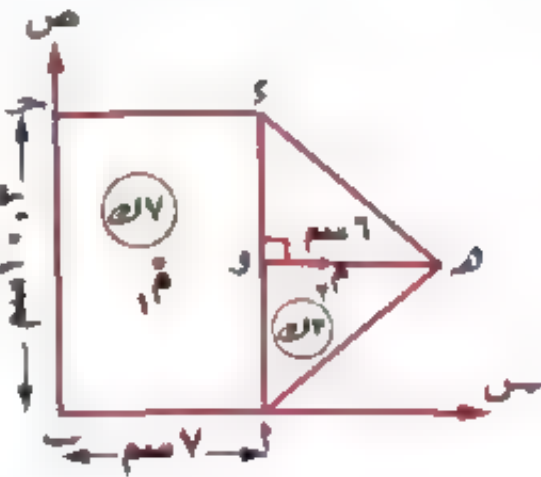
ثم نرسم م ن ⊥ أ ب

وليكن ل هو قياس زاوية ميل أ ب على الرأسى

∴ في $\Delta م ب ن$ يكون :

$$\frac{ن م}{م ب} = \frac{٥,١٥}{٥,١٥} \text{ ولكن } م ن = م ب = ٥,١٥ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ طال} = ١ \quad \therefore \text{ ل} = ٤٥^\circ$$



صفحة رقيقة منتظمة على شكل مربع ١ ب ح د طول ضلعه ١٨ سم ، $هـ$ ، و منتصف الضلعين $ا ب$ ، $ا د$ على الترتيب. ثنى المثلث $١ هـ$ و حول الضلع $هـ$ و بحيث انطبقت ١ على مركز المربع $(ن)$ عين مركز ثقل الصفحة في وضعها الجديد ثم إذا علقت الصفحة في هذا الوضع الجديد من الرأس ح تعليقاً حراً. فأوجد ظل زاوية ميل ح ب على الرأسى في وضع الاتزان.

الحل

نفرض أن كتلة الصفحة = ٤ ك

و منتصف ب ح في الوضع الجديد

نعتبر الصفحة مكوّنة من ثلاثة أجزاء :

١ الصفحة المثلثة و $هـ ن$ (المكوّنة من طبقتين)

وكتلتها = $\frac{1}{4}$ كتلة الصفحة = ك ومركز ثقلها = م

٢ الصفحة المربعة هـ ب و ن وكتلتها = ك ومركز ثقلها = م

٣ الصفحة المستطيلة و ح د وكتلتها = ٢ ك ومركز ثقلها = م وهذا معناه أن الصفحة

في وضعها الجديد أصبحت تكافئ مجموعة مكوّنة من ثلاث كتل هي كتلة (ك) عند م

، كتلة (ك) عند م ، كتلة (٢ ك) عند م

• نختار اتجاهين متعامدين مناسبين نر س ، نر ص

حيث نر مركز المربع ا ب ح د فنجد أن :

$$نر م = \frac{2}{4} نر ي = \frac{1}{4} نر ا \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4} نر ا$$

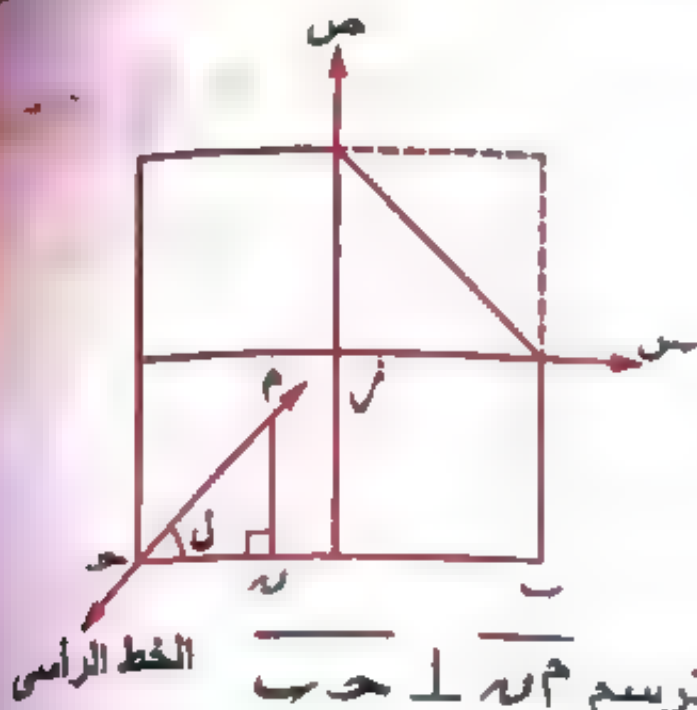
$$\text{ولكن نر ا} = ٩\sqrt{2} \text{ سم} \therefore نر م = \frac{1}{4} \times ٩\sqrt{2} = ٢\sqrt{2} \text{ سم}$$

$$\therefore م = (٢\sqrt{2} \text{ مم} \angle ٤٥^\circ ، ٢\sqrt{2} \text{ مم} \angle ٤٥^\circ) = (٣ ، ٣)$$

$$م' = \left(\frac{9}{4} - ، \frac{9}{4} -\right) ، م'' = \left(-\frac{9}{4} ، \text{صفر}\right)$$

ثم نكون الجدول الآتي :

الكتلة	ك	ك	٢ ك
س	٣	$\frac{9}{4}$	$\frac{9}{4}$
ص	٣	$\frac{9}{4}$	صفر



$$\frac{2}{8} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + 2 \times 2}{2 + 2 + 2} = \frac{2}{8} \text{ م.س.}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{0 \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + 2 \times 2}{2 + 2 + 2} = \frac{2}{8} \text{ م.ص.}$$

$$\left(\frac{2}{8} - \frac{2}{8}\right) = 0 \text{ م.}$$

ثم نصل ح م فيكون هو الخط الرأس عند التعليق من ح ونرسم م ن \perp ح ب

$$\therefore \angle 45^\circ$$

$$1 = \frac{\frac{2}{8} - 9}{\frac{2}{8} - 9} = \frac{2}{8} = \frac{2}{8} \text{ م.ص.}$$

حل آخر: يمكن اعتبار الصفحة مكوّنة من أربعة أجزاء

① الصفحة المثلية و م ن (المكوّنة من طبقتين)

وكتلتها = $\frac{1}{4}$ كتلة الصفحة = ل و مركز ثقلها = م

② الصفحة المربعة م ب و ن وكتلتها = ل و مركز ثقلها = م

③ الصفحة المربعة ن و ح م وكتلتها = ل و مركز ثقلها = م

④ الصفحة المربعة م ن و د وكتلتها = ل و مركز ثقلها = م

\therefore نكون الجدول الآتي :

الكتلة	ل	ل	ل	ل
م.س.	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
م.ص.	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$$\frac{2}{8} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + 2 \times 2}{2 + 2 + 2 + 2} = \frac{2}{8} \text{ م.س.}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 2 + 2 \times 2}{2 + 2 + 2 + 2} = \frac{2}{8} \text{ م.ص.}$$

$$\left(\frac{2}{8} - \frac{2}{8}\right) = 0 \text{ م.}$$

حل ثالث: من الرسم السابق نلاحظ أن مركز ثقل الكتلة (ل) عند م ، (ل) عند م هو (2 ل) عند ن

\therefore المجموعة تقول إلى أن جميع المراكز م ، م ، ن تقع على ح أ

\therefore ح أ هو الخط الرأس

\therefore ح أ يميل بزاوية 45° على الرأس.



من أسئلة الكتاب المدرسي

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ (دور أول ٢٠١٧) مركز ثقل نظام مؤلف من كتلتين ٤ ، ٨ كجم بينهما مسافة ٦ أمتار يبعد عن الكتلة الأولى مسافة متر.

- (أ) ٣ (ب) ٤ (ج) ٢ (د) ٥

٢ (دور ثلث ٢٠١٨) مركز ثقل نظام مؤلف من كتلتين ٧ ، ١١ كجم المسافة بينهما ٩٠ سم يبعد عن الكتلة الأولى مسافة سم.

- (أ) ٥٠ (ب) ٥٥ (ج) ٣٥ (د) ٤٥

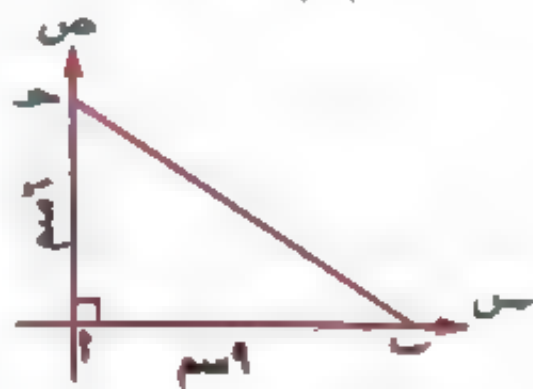
٣ (دور ثلث ٢٠١٨) مركز ثقل النظام التالي : $L_1 = ١$ كجم عند $(١ ، ٠)$ ، $L_2 = ٢$ كجم عند $(٢ ، ٠)$ ، $L_3 = ٣$ كجم عند $(١ ، ٢)$ هو

- (أ) $(\frac{1}{3} ، \frac{1}{3})$ (ب) $(١ ، ٢)$
(ج) $(\frac{2}{3} ، \frac{5}{3})$ (د) $(\frac{5}{3} ، \frac{2}{3})$

٤ مركز ثقل نقطتين ماديتين تفصل بينهما مسافة ثابتة يقع على القطعة المستقيمة الواصلة بينهما ويقسم طولها بنسبة لنسبة الكتلتين.

- (أ) طردية (ب) عكسية (ج) عشوائية (د) ثابتة

٥ (دور ثلث ٢٠١٧) في الشكل المقابل :



مركز ثقل ثلاث كتل متساوية قيمة كل واحدة ٢ كجم موضوعة عند رؤوس مثلث قائم الزاوية طولاً ضلعي القائمة فيه ٦ سم ، ٩ سم هو

- (أ) $(٣ ، ٢)$ (ب) $(٣ ، ٤ ، ٥)$ (ج) $(٢ ، ٣)$ (د) $(٤ ، ٦)$

٦ إذا علقت ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس المثلث $أ ب ح$ حيث :

- أ $(١ ، ٢)$ ، ب $(٤ ، ٣)$ ، ح $(١ ، ٤)$

فإن مركز ثقل هذه المجموعة هو

- (أ) $(٣ ، ٢)$ (ب) $(٢ ، ٣)$ (ج) $(٩ ، ٦)$ (د) $(٦ ، ٩)$

ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (x) أمام العبارة الخطأ في كل مما يأتي :

١) مركز ثقل الجسم الجاسي يكون ثابتاً ولا يقع بالضرورة على أحد جسيمات هذا الجسم. ()

٢) إذا عُلقَت صفيحة غير منتظمة ومحدودة بمثلث من أحد رؤوسها تعليقاً حُرّاً فإن الخط الرأسى المار بنقطة التعليق يمر بنقطة تلاقي المستقيمتان المتوسطة للمثلث. ()

٣) إذا وُضعت ثلاث كتل متساوية عند منتصفات أضلاع مثلث متساوى الأضلاع فإن مركز ثقلها يقع على نقطة تقاطع متوسطات المثلث. ()

٤) مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمثلث ينطبق مع مركز ثقل ثلاث كتل متساوية موضوعة عند رؤوس هذا المثلث. ()

٥) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس شبه منحرف متساوى الساقين فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقي قطرية. ()

٦) إذا عُلقَت صفيحة منتظمة السمك والكثافة ومحدودة بمثلث متساوى الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقاً حُرّاً كان الضلع المقابل لهذا الرأس أفقياً. ()

٧) إذا وُضعت أربع كتل متساوية عند رؤوس متوازي أضلاع فإن مركز ثقل المجموعة يؤثر عند نقطة تلاقي قطري متوازي الأضلاع. ()

٨) مركز ثقل سلك رفيع منتظم السمك والكثافة على شكل مثلث يقع فى نقطة تقاطع متوسطات المثلث. ()

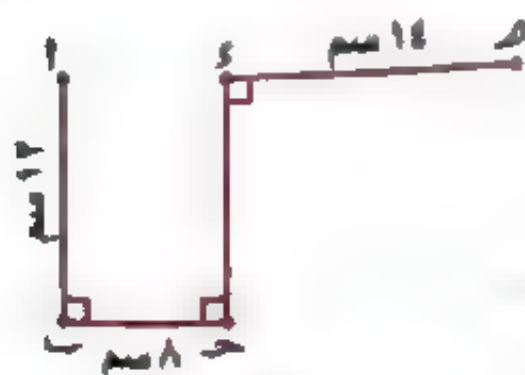
أوجد مركز ثقل النظام التالى :

لـ ١ = ١ كجم عند الموضع م_١ (٢ ، ٣) ، لـ ٢ = ٢ كجم عند الموضع م_٢ (-٢ ، ١) ، لـ ٣ = ٣ كجم عند الموضع م_٣ (١ ، ٠) ، لـ ٤ = ٤ كجم عند الموضع م_٤ (١/٣ ، ١/٣) .

أين يقع مركز ثقل نظام مؤلف من ثلاث كتل موزعة على النحو التالى :

لـ ١ = ١ كجم عند الموضع م_١ (٠ ، ٠) ، لـ ٢ = ٢ كجم عند الموضع م_٢ (٠ ، ٣) ، لـ ٣ = ٣ كجم عند الموضع م_٣ (٤ ، ٢) ، لـ ٤ = ٤ كجم عند الموضع م_٤ (٢ ، ٩/٤) .

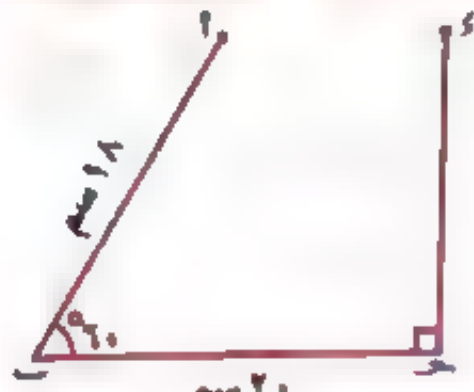
فى الشكل المقابل :



بالنسبة للنقطة ب» (٧.٢ ، ٧.٦)

إذا ثبتت خمس كتل متساوية مقدار كل منها لـ عند النقط ١ ، ب ، ح ، د ، هـ على الترتيب من الخط المنكسر أ ب ح د هـ الموضح بالشكل. أوجد مركز ثقل المجموعة.

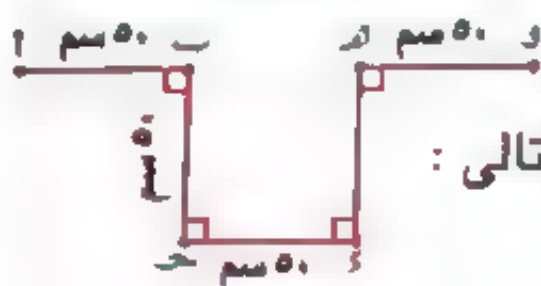
الدرس الاول



بالنسبة للنقطة 2 (14, 9) ، (2, 4.5) ، (3, 2.25)

في الشكل المقابل :

ثبتت أربع كتل مقاديرها 2 ك ، 2 ك ، 2 ك ، 4 ك عند النقط 1 ، 2 ، 3 ، 4 من الخط المنكسر 1-2-3-4 الموضح بالشكل. أوجد مركز ثقل المجموعة.



في الشكل المقابل :

عين مركز ثقل المجموعة حسب البيانات المعطاة في الجدول التالي :

الوزن	8 كجم	2 كجم	2 كجم	2 كجم
الموضع	عند 1	عند 2	عند 3	عند 4

بالنسبة للنقطة 2 (10, 12) ، (3, 4)

1- كتل قائم الزاوية في 2 فيه : 1 ك = 6 سم ، 1 ك = 10 سم وضعت كتل

مقاديرها 5 ك ، 7 ك ، 8 ك عند النقط 1 ، 2 ، 3 على الترتيب.

عين مركز ثقل المجموعة. (2, 8) ، (10, 12) باعتبار 1 ك ، 1 ك محوري إحداثيات موجبين.

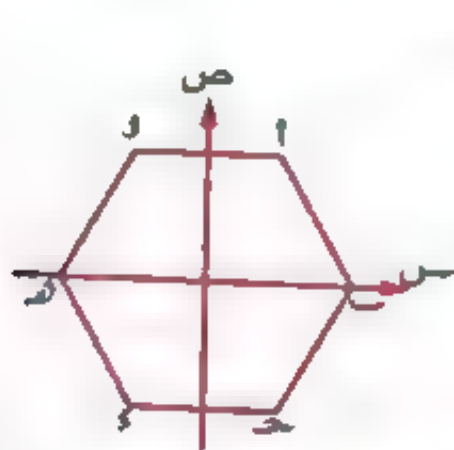
2- كتل قائم فيه : 1 ك = 5 سم ، 1 ك = 12 سم ، 1 ك = 12 سم وضعت كتل

منتصفا 1 ك ، 1 ك ، وضعت ثلاث كتل متساوية مقدار كل منها (ك) عند النقط 1 ، 2 ، 3

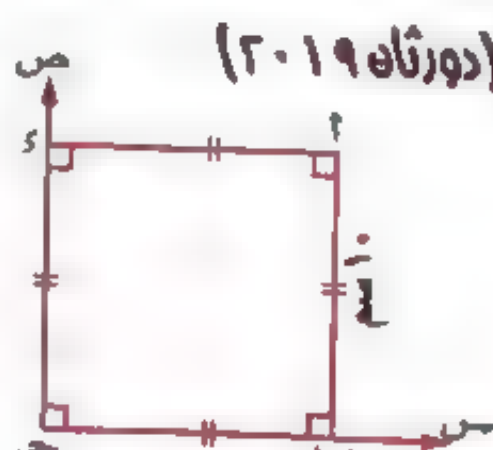
عين مركز ثقل المجموعة. وأوجد بعده عن 1 ك

3- (2, 12) ، (12, 2) باعتبار 1 ك ، 1 ك محوري إحداثيات موجبين ، 1 ك = 12 سم

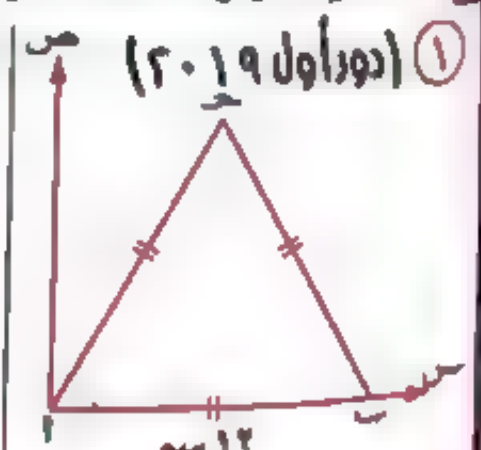
عين مركز ثقل كل من المجموعات الآتية حسب البيانات المعطاة في الجدول :



الكتلة	10 كجم	15 كجم	5 كجم	20 كجم
الموضع	عند 1	عند 2	عند 3	عند 4



الكتلة	20 كجم	20 كجم	10 كجم	40 كجم
الموضع	عند 1	عند 2	عند 3	عند 4



الكتلة	4 كجم	5 كجم	2 كجم
الموضع	عند 1	عند 2	عند 3

١١ **أ** ح مثلث متساوي الاضلاع ، طول ضلعه ٤ ديسيمترات ، النقطة $د$ ، $هـ$ ، $و$ منتصفات أضلاعه $ب$ ح ، $ح$ ا ، $ا$ ب على الترتيب ، وضعت الأثقال ٥ ، ١ ، ٢ ، ٢ ، ٤ ، ٦ كجم عند النقطة $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ ، $هـ$ ، $و$ على الترتيب. أوجد موضع مركز ثقل المجموعة من $ب$ $(\frac{44}{21}, \frac{32}{21})$ باعتبار $ب$ ح ، العمودى عليه من $ب$ محورى إحداثيات موجبين.

١٢ **أ** ح د مربع طول ضلعه ٤ سم ثبتت الكتل ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٢ جرام عند $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ على الترتيب ، كما ثبتت كتلة مقدارها ١٠ جرام عند منتصف $ا$ ب عين بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $ح$ د ، $ح$ ب ٢.٢ سم ، ٢.٠٨ سم.

١٣ **أ** ح د مستطيل فيه : $ا$ ب = ٨ سم ، $ب$ ح = ١٢ سم ثبتت الكتل ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ جم عند الرؤوس $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ على الترتيب كما ثبتت الكتلة ١٢ جم عند منتصف $ا$ ب أوجد مركز ثقل المجموعة بالنسبة إلى $ح$ ب ، $ح$ د $(٤.٨ ، ٥.٢)$

١٤ ثبتت الكتل ٦.٥ ، ٣.٥ ، ١.٥ ، ٨.٥ من الجرامات عند الرؤوس $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ من المعين $ا$ ب ح د الذى فيه : $ا$ ح = ٢ ب د = ١٦ سم. أثبت أن مركز ثقل هذه الكتل يبعد $\frac{5}{2}$ سم عن مركز المعين.

١٥ ثبتت الكتل ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ١٥ ، ٥ جرام عند رؤوس السداسى المنتظم $ا$ ب ح د هـ و على الترتيب. أثبت أن مركز ثقلها يقع على $ب$ د وأوجد بعده عن مركز السداسى. $\frac{1}{4}$ ل.

١٦ ثبتت كتل مقاديرها ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ٤٠ كجم عند الرؤوس $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ ، $هـ$ ، $و$ على الترتيب لمسدس منتظم طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد بُعد مركز ثقل هذه المجموعة على مركز المسدس. ٣٢.٥ سم

١٧ **أ** قضيب منتظم طوله ١٢ ديسيمتر وكتلته كيلو جرام واحد ثبتت كتلة قدرها كيلو جرام واحد عند $ا$ و ثبتت كتلة أخرى $\frac{1}{4}$ كجم عند نقطة $ح$ على بُعد ٤ ديسيمتر من $ب$ أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن $ا$ $\frac{1}{5}$ ديسيمتر من $ا$

١٨ **أ** قضيب منتظم ، وطوله ٩٠ سم وكتلته ٥ كجم ، $ح$ ، $د$ نقطتا تثليثه من ناحية الطرف $ا$ وضعت كتل مقاديرها ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ كجم عند النقطة $ا$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ على الترتيب عين بُعد مركز ثقل المجموعة عن الطرف $ا$ ٤٩ سم.

صفحة رقيقة منتظمة كتلتها ٢٠٠ جرام على هيئة المربع Γ ح د الذي طول ضلعه ٢٠ سم.
 ثبتت الكتل ٨٠ ، ٢٠ ، ٥٠ ، ٤٠ من الجرامات عند Γ ، ب ، ح ، د على الترتيب.
 أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من \overline{AB} ، \overline{AD}
 « ٩ سم ، ٩ سم »

صفحة رقيقة منتظمة كتلتها ٤ كيلو جرام على شكل المستطيل Γ ح د الذي فيه :
 $\Gamma = ٨$ سم ، $\Delta = ١٢$ سم. ثبتت الكتل ١٠ ، ٨ ، ٢ ، ٦ كجم عند Γ ، ب ،
 ح ، د على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل هذه المجموعة يبعد عن ح ب ، ح د بمقدار
 ٨ سم ، ٤ سم على الترتيب.

Γ ح صفحة مثلثة الشكل متساوية الأضلاع كتلتها ٣ كجم ، م مركز ثقلها ،
 وضعت كتل مقاديرها ٢ ، ٢ ، ١١ كجم عند الرؤوس Γ ، ب ، ح على الترتيب. برهن
 أن مركز ثقل المجموعة يقع عند نقطة منتصف \overline{CH}

Γ ح د صفحة رقيقة منتظمة كتلتها ١٦٠ جرام على شكل معين فيه : $\Gamma = ٢٠$ سم
 $\Delta = ٦$ سم ثبتت الكتل ٢٠٠ ، ٥٢٠ ، ٤٤٠ ، ٢٨٠ جرام عند منتصفات الأضلاع
 \overline{AB} ، \overline{BC} ، \overline{CD} ، \overline{DA} على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل المجموعة يقع على \overline{AC} ويبعد
 ١٠ سم عن مركز المعين.

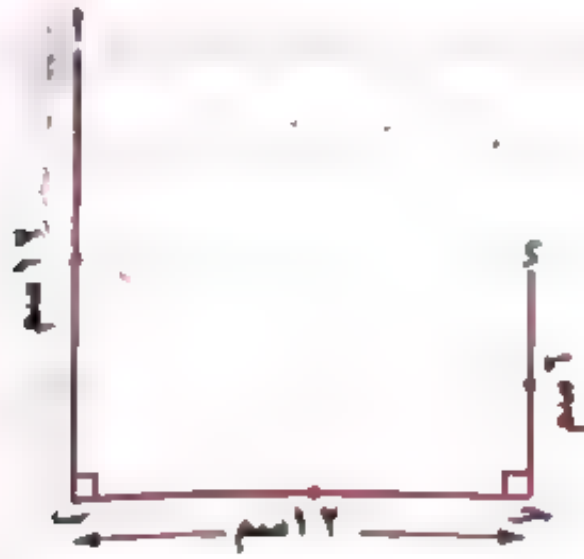
صفحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣ كجم على هيئة السداسي المنتظم Γ ح د ه و الذي
 طول ضلعه ١٥ سم ، ثبتت الكتل ١ ، ٢ ، ٤ ، ٣ ، ٢ كجم عند Γ ، ب ، ح ، د ، و على
 الترتيب. أثبت أن مركز ثقل المجموعة يبعد ٤ سم عن مركز السداسي.

Γ ح صفحة مثلثة رقيقة منتظمة كتلتها ٤ كجم ثبتت الكتل ٦ ، ٤ ، ١٢ ، ٢ كجم عند
 Γ ، منتصف \overline{AB} ، منتصف \overline{BC} ، ح على الترتيب.
 أثبت أن مركز ثقل المجموعة ينطبق على مركز ثقل المثلث.

Γ ح صفحة مثلثة رقيقة منتظمة ثبتت الأثقال ٦ ، ٨ ، ٤ ثقل جرام عند الرؤوس Γ
 Δ ، ح على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل هذه الأوزان يقع على المستقيم \overline{CH}
 المرسوم من مركز المثلث (م) موازياً ح ب وملاقياً \overline{AB} في م ويقسمه بنسبة ١ : ٢

Γ ح سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث قائم الزاوية في ب فيه : $\Gamma = ٦$ سم
 $\Delta = ٨$ سم. أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كل من \overline{AB} ، \overline{BC}
 « ٢ سم ، ٢ سم »

٢٧ في الشكل المقابل :



أ ب سلك رفيع منتظم الكثافة ثنى عند ب ، ح
أوجد بُعد مركز الثقل عن كل من أ ب ، ح
، ثم أوجد في وضع الاتزان قياس زاوية ميل أ ب على
الرأسي إذا عُلق السلك من أ تعليقاً حرّاً.

٢٨ (٣ ، ٤ ، ٨) ، ٢٨ ٤

٢٨ سلك منتظم السُمك والكثافة طوله ١٢٠ سم وكتلته ٦٠٠ جرام ، ثنى على شكل
مثلث أ ب ح قائم الزاوية في ب حيث : أ ب = ٢٠ سم ، إذا ثُبِتت كتلة لـ جـرام عند
الرأس أ ، ثم عُلق السلك تعليقاً حرّاً من الرأس ب فاتزن عندما كانت أ ح أفقية
فأوجد : لـ

٢٠٠٠ جرام

٢٩ علقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها و تعليقاً حرّاً من الرأس أ وثُبِت عند الرأس ب ثقل
وزنه $\frac{1}{4}$ و أثبت أن ظل زاوية ميل القطر أ ح على الرأسى فى وضع الاتزان يساوى $\frac{1}{6}$

٣٠ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة وعلى شكل متوازي الأضلاع أ ب ح د الذى فيه :
أ ب = ٦٠ سم ، ب ح = ٢٠ سم ، $\angle (د ب ح) = ٩٠^\circ$ عيّن نقطة مثل هـ
على ح د بحيث إذا علقت منها الصفيحة أصبح ح د أفقياً.
« ح د = $٢٢\frac{1}{4}$ سم »

٣١ صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بمتوازي أضلاع أ ب ح د فيه :
أ ب = ٢٠ سم ، د أ = ١٠ سم ، $\angle (د ب أ) = ٦٠^\circ$ إذا علقت الصفيحة
تعلقاً حرّاً من نقطة هـ \exists ح د وكان أ ب أفقياً. أوجد طول : هـ د
« ٧,٥ سم »

٣٢ سلك رفيع منتظم الكثافة يُكوّن الأضلاع أ ب ، ب ح ، ح د من المربع أ ب ح د الذى
طول ضلعه ٦ سم. أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كل من أ ب ، ب ح وإذا عُلق السلك
من ب تعليقاً حرّاً. فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل ب ح على الرأسى.
٢ سم ، ٢ سم ، ٢٣ ٤١

٣٣ ثنى قضيب منتظم أ ب ح طوله ٢ ل من نقطة منتصفه ب ثم عُلق من الطرف أ تعليقاً حرّاً.
فإذا علم أن ب ح كان أفقياً فى وضع الاتزان.
أثبت أن : ح أ = (د أ ب ح) = $\frac{1}{4}$ ثم أوجد بُعد مركز ثقل القضيب بأكمله عن أ
٢٧ ٢

٣٣

٣٤ ثنى قضيب منتظم $\overline{أ ح}$ طوله ١٥ ل من نقطة $ب$ حيث : $أ ب = ٥$ ل بحيث :
 و (د أ ب ح) $= ٩٠^\circ$ وعلق القضيب من الطرف $أ$ تعليقاً حُرّاً.
 فأثبت أن : $ب ح$ يميل على الأفقى بزاوية θ حيث : $\tan \theta = \frac{٤}{٥}$

٣٥ أ ح ب قضيب منتظم السمك حيث : $أ ح = ب ح$ وكان نصفه $\overline{أ ح}$ مصنوع من مادة والنصف الآخر $ب ح$ من مادة أخرى وكان مركز ثقل القضيب على بُعد $\frac{٢}{٣}$ طوله من $أ$ أوجد النسبة بين وزني نصفي القضيب.
 « ١ : ٥ »

٣٦ أ ب ، ب ح قضيبان من مادة واحدة ، $أ ب = \frac{١}{٣} ب ح = ل$ سم ومتصلان اتصالاً ثابتاً عند (ب) علق القضيبان من الطرف (أ) فأتزنا بحيث كان $ب ح$ أفقياً. أثبت أنه في هذه الحالة يكون $\psi = (د أ ب ح) = ٣٦^\circ ٥٢'$

٣٧ الشكل المقابل يمثل إطاراً من الصلب الرفيع على هيئة شبه منحرف $أ ب ح د$ فيه :



$د أ = ٤٠$ سم ، $ب ح = ٦٠$ سم ، $ب ح = ١٢٠$ سم.
 فإذا علم أن كثافة الصلب المصنوع منه الجزء $د أ$ تساوى ضعف كثافة الصلب المصنوع منه باقى الإطار.

عُيِّنَ مركز ثقل الإطار علماً بأن : $\psi = (د ح) = \psi = (د أ) = ٩٠^\circ$
 « $(\frac{١٠٠}{٣} , \frac{٢٠٠}{٣})$ »

٣٨ عُلقت صفيحة مربعة منتظمة وزنها ٥٠ ثقل جرام تعليقاً حُرّاً من الرأس $أ$ وثُبتت عند الرأس $ب$ ثقل مقداره ١٠ ثقل جرام.
 أوجد قياس زاوية ميل القطر $أ ح$ على الرأسى فى وضع الاتزان.
 « ٩٦٨° »

٣٩ صفيحة رقيقة منتظمة وزنها ٢٠٠ ثقل جرام على هيئة المربع $أ ب ح د$ الذى طول ضلعه ٢٠ سم. وضعت الأثقال ٨٠ ، ٣٠ ، ٥٠ ، ٤٠ ثقل جرام عند $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ على الترتيب. أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن كل من $أ ب$ ، $د أ$ وإذا عُلقت الصفيحة من $أ$ تعليقاً حُرّاً. فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $د أ$ على الرأسى.
 « $٩٦^\circ ٤٣'$ ، ٩ ، $٩ \frac{١}{٣}$ »

٤٠ صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٣٠ جرام على هيئة المثلث $أ ب ح$ الذى فيه : $أ ب = ب ح$ ، $ب ح$ يساوى طول ارتفاع المثلث يساوى ٦٠ سم ثُبتت الكتل ٢٠ ، ٢٠ ، ٢٠ ، ٤٠ جرام عند $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، منتصف $أ ب$ على الترتيب. أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن $ب ح$ وإذا عُلقت المجموعة من $ب$ تعليقاً حُرّاً فأوجد فى وضع التوازن قياس زاوية ميل $ب ح$ على الرأسى.
 « ٤٠ سم ، ٤٦° »

٤١ صفيحة مستطيلة منتظمة $أ ب ح د$ مقدار وزنها ١٠ ، فيها : $أ ب = ٦٠$ سم ، $أ د = ٢٠$ سم تحمل ثقلاً عند الرأس $د$ علقت الصفيحة تعليقاً حُرّاً من الرأس $أ$ فارتزنت في وضع يميل فيه الضلع $أ د$ على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥° أوجد مقدار الثقل المثبت عند $د$ ، و .

٤٢ سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل شبه المنحرف $أ ب ح د$ الذى فيه : $أ ب = ٣$ سم ، $أ د = ٢٤$ سم ، $د ح = ١٢$ سم ، $و = (د أ ح) = و = (د ح ب) = ٩٠^\circ$ أثبت أن مركز ثقل السلك يبعد عن كل من $أ$ ، $د$ بمقدار ٥ ، ٤ سم ، ١٠ سم على الترتيب. وإذا عُلّق السلك من $ح$ تعليقاً حُرّاً فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل $ح د$ على الرأسى. « ٥٣ ٨ »

٤٣ سلك منتظم السمك والكثافة على هيئة شبه منحرف $أ ب ح د$ متساوى الساقين فيه : $أ د // ب ح$ وأطوال $أ د$ ، $د ح$ ، $ح ب$ هي ٣ ، ٥ ، ٩ سم على الترتيب. عيّن مركز ثقل السلك. ثم إذا عُلّق السلك من $أ$ تعليقاً حُرّاً فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل $أ د$ على الرأسى. $٣٠ = (١ \frac{١}{٣} ، ٤ \frac{١}{٣})$ باعتبار $ح ب$ والعمودى عليه محورى إحداثيات موجبين ، « ٥٩ ٢٩ »

٤٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ جسيمان ماديان كتلتاهما ١٠ ، $ل$ جم تؤثران عند نقطتى $أ$ ، $ب$ على الترتيب حيث : $أ ب = ٥٠$ سم فإذا كان مركز ثقل الجسيمين يؤثر فى نقطة $ح \in أ ب$ حيث : $أ ح = ٢٠$ سم فإن : $ل =$ جم.

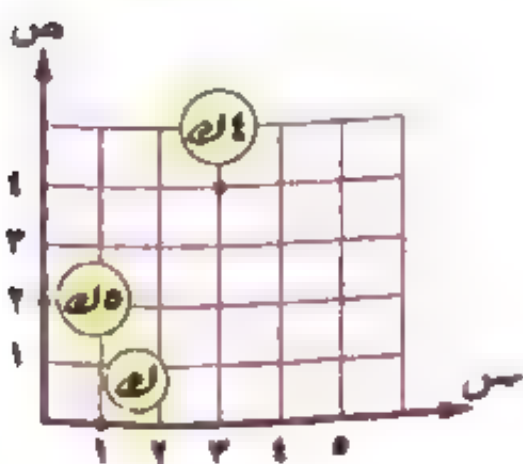
- (١) ٢٠ (ب) $\frac{٢٠}{٣}$ (ج) ٤٠ (د) $\frac{٤٠}{٣}$

٢ سلك رفيع منتظم السمك والكثافة ثنى على شكل مثلث $أ ب ح$ قائم الزاوية فى $ب$ فيه : $أ ب = ٢$ سم ، $ب ح = ٤$ سم فإن بُعد مركز ثقل السلك عن كل من $أ$ ، $ب$ ، $ح$ هو

- (١) (١ ، ١ ، ٥) (ب) (٢ ، ١ ، ٥) (ج) $(\frac{١}{٤} ، \frac{١}{٤})$ (د) $(\frac{١١}{٤} ، \frac{١٢}{٧})$

٢ الشكل المقابل يبين ثلاث كتل : $ل$ ، ٤ ، ٥ لـ فإن مركز ثقل المجموعة يقع عند النقطة

- (١) $(\frac{١٣}{٥} ، \frac{١٣}{١٠})$ (ب) $(\frac{٢٧}{١٠} ، \frac{٩}{٥})$ (ج) $(\frac{٢٧}{١٠} ، \frac{١٧}{١٠})$ (د) $(\frac{١٣}{١٠} ، \frac{١٢}{٥})$

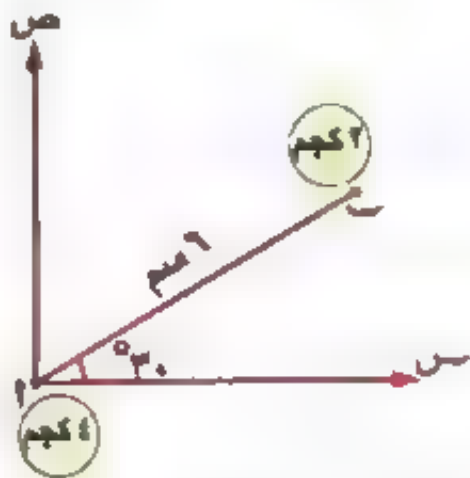


٤ ثلاث كتل ٣ كجم ، ٢ كجم ، ١ كجم وضعت عند النقاط (٤ ، ٦) ، (٥ ، ٢) ، (١ ، ٢) على الترتيب فكان مركز ثقل المجموعة عند النقطة (٣ ، ص) فإن : ص =

(١) ٣ (ب) ٢.٢ (ج) ٣.٤ (د) ٣.٢ -

٥ إذا وضعت الكتلة ١ كجم عند الموضع أ (١ ، ٢) ، ٢ كجم عند الموضع ب (٢ ، ٢) ، ٣ كجم عند الموضع ج (٥ ، ٤) ، ٤ كجم عند الموضع د (س ، ص) وكان مركز ثقل المجموعة هو نقطة الأصل فإن : (س ، ص) =

(١) (٥ ، ١) (ب) (٢ ، ٣) (ج) (١ ، ٥) (د) (٥ ، ١) -



٦ في الشكل المقابل :

مركز ثقل المجموعة =

(١) (٢ ، ٤) (ب) (٤ ، ٢) (ج) (١ ، ٣) (د) (٣ ، ١)

٧ ٢ كتل متساوية موضوعة عند رؤوس مثلث قائم متساوي الساقين أ ب ج قائم الزاوية عند أ ، ب ج = ٨ سم إذا كان م هو مركز ثقل المجموعة فإن : م = سم.

(١) ٦ (ب) $\frac{8}{3}$ (ج) ٤ (د) ٨

٨ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث قائم الزاوية يقع عند نقطة تلاقي

(١) ضلعي القائمة. (ب) منصفات زواياه. (ج) تلاقي الأعمدة. (د) متوسطاته.

٩ مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بدائرة معادلتها

$س^2 + ص^2 - ٤س - ٦ص - ٢ = ٠$ يقع في النقطة

(١) (٦ ، ٤) (ب) (٤ ، ٦) (ج) (٢ ، ٢) (د) (٢ ، ٢) -

١٠ في الشكل المقابل :

ساق من المعدن منتظم طوله ١ متر ووزنه ١ ث. كجم ومتصل بكرة حديدية منتظمة وزنها $\frac{1}{4}$ ث. كجم عند الطرف أ حيث كان طول قطرها ٢٠ سم فإن بعد مركز ثقل المجموعة عن ب يساوي سم

- (١) ٥٠ (ب) ٦٠ (ج) ٦٥ (د) ٧٠

١١ سلك منتظم السُمك والكثافة على شكل دائرة محيطها $\pi ٥٠$ سم وضعت داخل الدائرة صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مثلث أ ب ح متساوي الأضلاع بحيث تقع رؤوسه على الدائرة فإذا كان طول ضلع المثلث يساوي ل سم فإن مركز ثقل المجموعة يبعد عن أ بمقدار سم

- (١) ل (ب) $٢٥ + \frac{ل}{٢}$ (ج) $\frac{ل٢ - ٢٥}{٢}$ (د) ٢٥

١٢ إذا عُلقَت صفيحة منتظمة السُمك والكثافة ومحدودة بمثلث متساوي الأضلاع من أحد رؤوسها تعليقاً حُرّاً فإن الضلع المقابل لهذا الرأس يصنع مع الأفقى زاوية
(١) صفرية. (ب) قائمة. (ج) حادة. (د) منفرجة.

١٣ (دور أول ٢٠١٨) في الشكل المقابل :

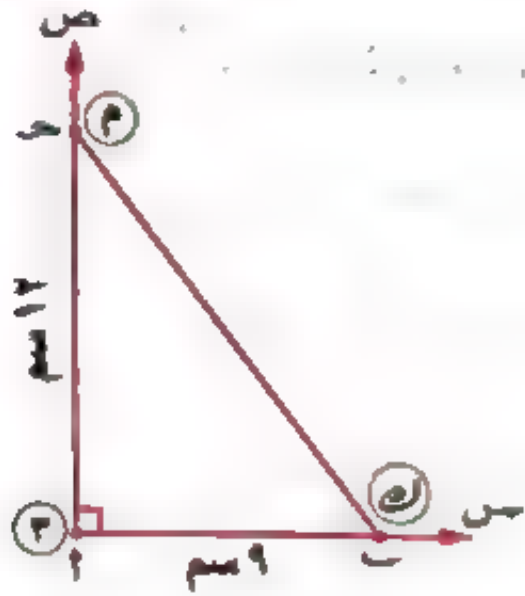
أ ب ح سلك طوله ٢٢ سم فيه : أ ب = ٢ ب ح = ٢ ح د = ٢ د هـ = ١٦ سم فإن بُعد مركز ثقل السلك عن كلٍ من ب ح ، أ على الترتيب هو

- (١) (٢ ، ٣) (ب) (٤ ، ٤) (ج) (٢ ، ٥) (د) (٤ ، ٨)

١٤ في الشكل المقابل :

صفيحة رقيقة كتلتها ٦٠٠ جم على شكل مثلث متساوي الأضلاع أ ب ح طول ضلعه ٢٦ سم ، ألصقت كتلة ٢٠٠ جم في الصفيحة عند نقطة تكليث أ ب فإن مركز ثقل المجموعة بالنسبة للمحورين أ س ، أ ص هي

- (١) (١٦,٥ ، ٤,٥) (ب) (٦ ، ٤,٥) (ج) (١٨ ، ٤,٥) (د) (١٨ ، ٦)



١٥ في الشكل المقابل :

أ ب ح مثلث فيه : أ ب = ٩ سم ، أ ح = ١٢ سم
الكتل ٢ جم ، ٤ جم ، ٣ جم وضع
عند النقط أ ، ب ، ح على الترتيب
فإذا كان مركز ثقل المجموعة (٢ ، ٤)
فإن : ٢ م + ٤ ل =
.....

- (١) ١٠ (ب) ١٢ (ج) ١٥ (د) ٢٢

١٦ بعد مركز ثقل صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم عن أحد رؤوس المثلث يساوي

- (١) ٢/٣ سم (ب) ٤/٣ سم (ج) ٦ سم (د) ٦/٣ سم

١٧ أ ب قطعة مستقيمة طولها ١٥٠ سم وجسمان كتلتاهما ١ كجم ، ٢ كجم موضوعان على بُعد ١٥ سم ، ٥٠ سم من الطرف أ ومن الطرف ب على الترتيب المسافة التي يجب وضع كتلة ٢ كجم من الطرف أ بحيث يكون مركز ثقل المجموعة في منتصف القطعة المستقيمة أ ب = سم

- (١) ٤٠ (ب) ٥٠ (ج) ٦٧,٥ (د) ٧٥

١٨ إذا علقت صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث أ ب ح متساوي الأضلاع بخيط من نقطة على أحد أحرفها (وليكن أ ح) تقسمه بنسبة ١ : ٢ من (جهة ح) فإن زاوية ميل هذا الحرف على الرأسى تساوي

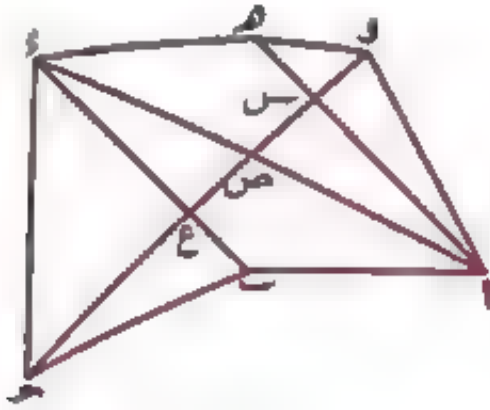
- (١) ٢٢,٥° (ب) ٣٠° (ج) ٤٥° (د) ٦٠°

١٩ مثلثان متساويًا الساقين أ ب ح ، أ ب د مشتركان في القاعدة أ ب وفي جهتين مختلفتين منها وارتفاعيهما الماظران لهذه القاعدة هما ١٢ سم ، ٦ سم على الترتيب فإن مركز ثقل المجموعة يبعد عن أ ب مسافة سم.

- (١) ١/٢ (ب) ١ (ج) ١,٥ (د) ٢

٢٠ أي مما يأتي لا يكون مركز ثقله هو نفسه نقطة تقاطع متوسطاته ؟

- (أ) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مثلث متساوي الأضلاع.
(ب) صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مثلث مختلف الأضلاع.
(ج) سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث متساوي الأضلاع.
(د) سلك رفيع منتظم الكثافة على شكل مثلث مختلف الأضلاع.



٢١ في الشكل المقابل :

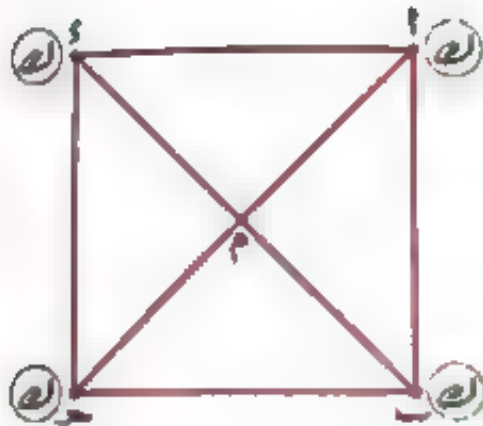
صفحة معدنية AB ح AD و علقت من نقطة B
فكان B رأسياً وعلقت من نقطة C فكان C رأسياً
فإن مركز ثقل الصفحة نقطة

(د) منتصف AC

(ج) E

(ب) BC

(أ) AD



٢٢ الشكل المقابل يوضح نظام من E كتل متساوية موضوعة
عند رؤوس مربع إذا تحركت الكتلة عند B في اتجاه BC
فإن مركز ثقل المجموعة

(أ) يظل ثابت عند E

(ب) يتحرك في اتجاه BC

(ج) يتحرك في اتجاه CD

(د) يتحرك في اتجاه AD



٢٣ الشكل المقابل يمثل سلكاً منتظم الكثافة والسُمك

بحيث : $AB = 4$ سم ، $AC = 12$ سم

، زاوية B قائمة ، إذا علّق السلك تعليقاً حُرّاً

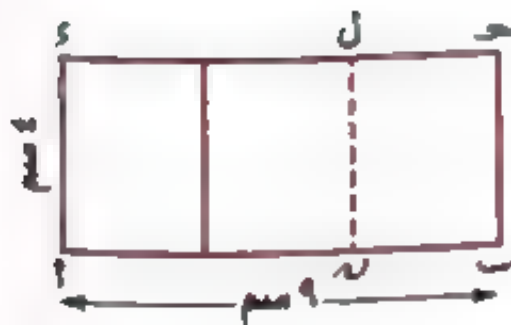
من B ، فما ظل الزاوية بين BC والرأسى في حالة الاتزان ؟

(د) $\frac{1}{3}$

(ج) $\frac{1}{4}$

(ب) $\frac{1}{5}$

(أ) $\frac{1}{6}$



٢٤ الشكل المقابل يبين صفحة مستطيلة رقيقة ومنتظمة

بُعداها ٩ سم ، ٤ سم ، قُسمت الصفحة إلى ثلاث

مستطيلات متطابقة ، فإذا ثنيت الصفحة عند L و R

حتى لامس سطح المنطقة B ح L و R باقى الصفحة

، فإن بُعد مركز الثقل عن A يساوى سم.

(د) ٤, ٢

(ج) ٤

(ب) $3\frac{1}{4}$

(أ) ٣

٤٥ **أ** ح د سلك رفيع منتظم الكثافة ثنى عند $\overline{ب}$ ، ح بحيث كان :
 $\overline{و} (\Delta \overline{أ ب ح}) = \overline{و} (\Delta \overline{ب ح د}) = 90^\circ$ وكان ح د ، $\overline{ب أ}$ في جهة واحدة من $\overline{ب ح}$
 وكانت أطوال $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ح}$ ، ح د هي على الترتيب ١٢ ، ٨ ، ٤ سم.
 أوجد بُعد مركز ثقل السلك عن كل من $\overline{أ ب}$ ، $\overline{ب ح}$
 وإذا عُلق السلك من $\overline{أ}$ تعليقاً حُرّاً فأوجد في وضع التوازن ظل زاوية ميل $\overline{أ ب}$ على الرأسى
 ثم أوجد أين يقطع الخط الرأسى الجزء $\overline{ب ح}$
 « $2\frac{2}{3}$ سم ، $2\frac{1}{3}$ سم ، $\frac{4}{3}$ ، على بُعد $2\frac{9}{13}$ سم من $\overline{ب ح}$ »

٤٦ حل المسألة السابقة عندما يكون ح د ، $\overline{ب أ}$ في جهتين مختلفتين من $\overline{ب ح}$
 « $2\frac{2}{3}$ سم ، $2\frac{2}{3}$ سم ، $\frac{2}{3}$ ، على بُعد $2\frac{2}{3}$ سم من $\overline{ب ح}$ »

٤٧ **أ** صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مستطيل $\overline{أ ب ح د}$ فيه :
 $\overline{أ ب} = 6$ سم ، $\overline{ب ح} = 10$ سم ، $\overline{أ د} \parallel \overline{ب ح}$ بحيث : $\overline{أ د} = 6$ سم ، ثنى
 المثلث $\overline{أ ب ح}$ حول الضلع $\overline{ب ح}$ بحيث : يقع $\overline{أ ب}$ على $\overline{ب ح}$ تماماً عيّن موضع مركز
 الصفيحة بعد ثنيها بالنسبة إلى $\overline{ح د}$ ، $\overline{ب ح}$
 « 2.4 سم ، 4.4 سم »

٤٨ صفيحة متجانسة تتكون من المربع $\overline{أ ب ح د}$ والمثلث $\overline{ب ح د}$ المتساوي الساقين الذي
 طول كل من ساقيه ١٠ سم والمرسوم في الجهة الخارجة من المربع. فإذا علم أن طول
 ضلع المربع ١٢ سم فأوجد بُعد مركز ثقل الصفيحة كلها عن مركز المربع وإذا عُلق
 الصفيحة من $\overline{أ}$ تعليقاً حُرّاً.
 فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل $\overline{أ د}$ على الرأسى.
 « $2\frac{1}{3}$ سم ، 53.42° »

٤٩ **أ** ح د مربع طول ضلعه l رسم على $\overline{ب ح}$ ، مثلث متساوي الساقين $\overline{ب ح د}$
 بحيث يقع الرأس $\overline{د}$ خارج المربع. أوجد مركز ثقل الصفيحة منتظمة السمك والكثافة
 المحدودة بالشكل الناتج علماً بأن طول ضلع المربع يساوي ضعف طول ارتفاع المثلث.
 « $(\frac{19}{3}l ، \frac{1}{3}l)$ باعتبار $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ د}$ محوري إحداثيات موجبين »

٥٠ تتكون صفيحة منتظمة الكثافة من جزأين : مستطيل $أ ب ح د$ فيه : $أ ب = ١٢$ سم ، $ب ح = ١٦$ سم ومثلث متساوي الساقين $ح د ه$ فيه : $د ه = ١٠$ سم والرأس $ه$ خارج المستطيل. عيّن مركز ثقل الصفيحة. $(٦, \frac{١٥٢}{١٥})$ باعتبار $ب ح$ ، $ب أ$ محوري إحداثيات موجبين.

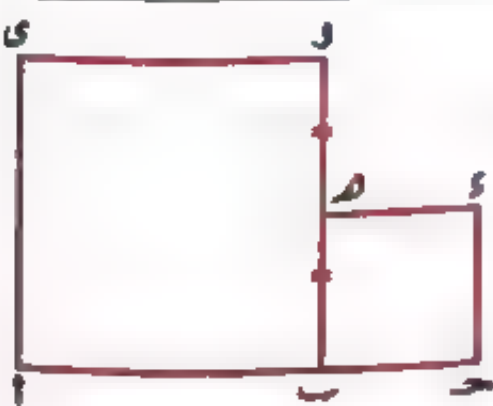
٥١ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع $أ ب ح د$ طول ضلعه $ل$ ، فيها $ه$ ، ومنتصفا الضلعين $أ ب$ ، $د ه$ على الترتيب. ثنى المثلث $أ ه$ و حول الضلع $ه و$ بحيث انطبقت $أ$ على مركز المربع $ي$ عيّن مركز ثقل الصفيحة في وضعها الجديد. $(- \frac{١}{٤٨} ل ، - \frac{١}{٤٨} ل)$ باعتبار $ي ه$ ، $ي و$ محوري إحداثيات موجبين.

٥٢ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه $ل$ إذا كان $ه و$ ، $و ه$ منتصفا الأضلاع $أ ب$ ، $د ه$ ، $ب ح$ على الترتيب ثنى المثلث $أ ه$ و حول الضلع $ه و$ بحيث انطبقت $أ$ على مركز المربع $ي$ و ثنى المثلث $ب ه$ على الضلع $ه و$ بحيث انطبق الرأس $ب$ على مركز المربع $ي$ عيّن مركز ثقل الصفيحة في وضعها الجديد. $(٠, \frac{١}{٢٤} ل)$ باعتبار $ي ه$ ، $ي و$ محوري إحداثيات موجبين.

٥٣ $أ ب ح د$ صفيحة منتظمة السُمك والكثافة على شكل مستطيل فيه : $أ ب = ١٢$ سم ، $ب ح = ١٦$ سم ، $ه$ نقطة تقاطع قطرية $أ ح$ ، $ب د$ فصل المثلث $أ ه د$ وثبت فوق المثلث $ب ه$ أوجد مركز ثقل الصفيحة في هذه الحالة. وإذا علقت الصفيحة تعليقاً حُرّاً من نقطة $ح$ ، فأوجد ظل زاوية ميل $ب ح$ على الرأسى. $(٠, -٢)$ باعتبار $ه$ نقطة الأصل ، $ه س$ ، $ه ص$ محوري إحداثيات موجبين حيث $ه س // ب ح$ ، $ه ص // أ ب$ ، $\frac{١}{٢}$.

٥٤ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل مربع $أ ب ح د$ طول ضلعه ٤٨ سم ، $م$ نقطة تقاطع قطريه. قُطع المثلث $ح م د$ ثم لصق على المثلث $ح م ب$ بحيث انطبق $د م$ على $م ب$. أوجد بُعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من $ب أ$ ، $ب ح$. ٢٠ سم ، ٢٠ سم.

٥٥ الشكل المقابل يمثل صفيحتين منتظمتي السُمك متصلتين معاً في مستوى واحد وكتلة وحدة المساحات للمربع $ب ح د ه$ ضعف كتلة وحدة المساحات للمربع $أ ب و ي$ علق الجسم المكوّن منهما من نقطة $أ$ تعليقاً حُرّاً. برهن على أن $أ ي$ يصنع مع الرأسى في حالة التوازن زاوية ظلها $\frac{٩}{٥}$



١٥٦ ا ب ح د صفيحة رقيقة غير منتظمة على شكل مستطيل فيه :

ا ب = ٦ سم ، ب ح = ٣ سم ، علقت الصفيحة تعليقاً حُرّاً من الرأس (د) فوجد في وضع التوازن أن $\overline{د ب}$ رأسياً ، وعندما علقت الصفيحة تعليقاً حُرّاً من الرأس (أ) كان $\overline{د ب}$ أفقياً في وضع التوازن.

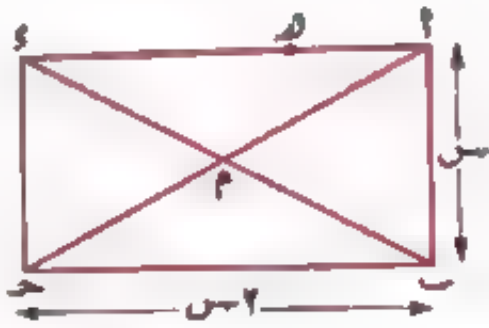
عُيِّن بعد مركز ثقل الصفيحة عن كل من أ ب ، ب ح

$\frac{٣}{٢}$ سم ، $\frac{١}{٤}$ سم

مسائل تقسيم مستويات علما من التفكير

٥٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ في الشكل المقابل :



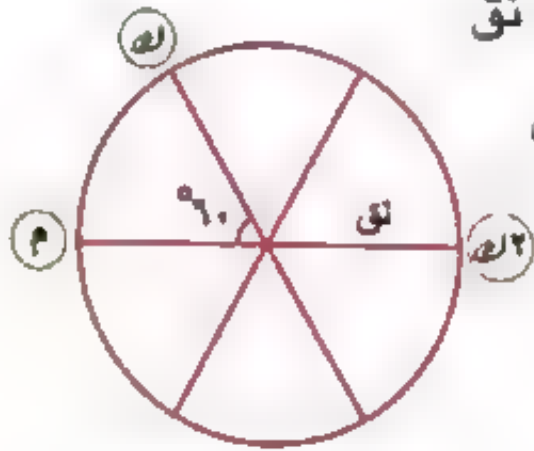
صفيحة مستطيلة طولها ضعف عرضها

علقت من نقطة د \exists أ د تعليقاً حُرّاً

فاتزنّت بحيث كان $\overline{د ب}$ أفقياً فإن : أ د =

- (١) $\frac{٥}{٤}$ سم (ب) $\frac{١}{٤}$ سم (ج) $\frac{٣}{٨}$ سم (د) $\frac{٣}{٤}$ سم

٢ الشكل المقابل يمثل عجلة مهمة الكتلة طول نصف قطرها نق



يمكنها الدوران في مستوى رأسى حول عمود أفقى أملتس

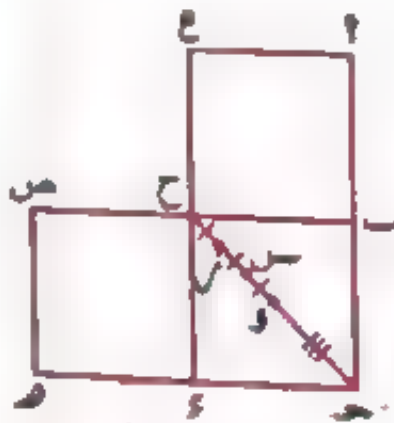
، تُبِت عليها ثلاث كتل مقدارها لـ ٢ ، لـ ٢ ، م

فإذا اتزنت العجلة كما بالشكل ،

فإن قيمة م بدلالة لـ هي

- (١) $\frac{١}{٤}$ لـ (ب) لـ (ج) $\frac{٣}{٤}$ لـ (د) ٢ لـ

٢ في الشكل المقابل :



صفيحة على شكل ثلاثة مربعات متماثلة

وكان : ح نر = نر س = س و = $\frac{١}{٤}$ ح و

إذا علقت الصفيحة من نقطة أ

فإن يكون رأسياً.

- (١) $\overline{أ نر}$ (ب) $\overline{أ و}$ (ج) $\overline{أ ح}$ (د) $\overline{أ س}$

٤ في الشكل المقابل :



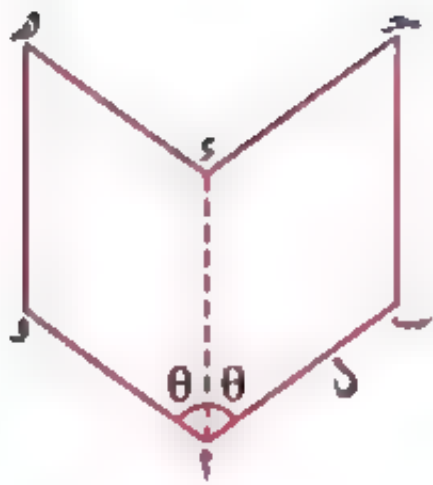
نظام مكون من كتلتين ٢ كجم ، ٤ كجم عند ٩ ، ب
إذا تحركت الكتلة ٤ كجم في اتجاه \overrightarrow{AB} مسافة ٥ سم فلكي لا يتغير مركز
ثقل المجموعة يجب أن تتحرك الكتلة ٢ كجم مسافة

- (١) ٢,٥ سم في اتجاه \overrightarrow{AB} (ب) ٢,٥ سم في اتجاه \overrightarrow{BA}
(ج) ١٠ سم في اتجاه \overrightarrow{AB} (د) ١٠ سم في اتجاه \overrightarrow{BA}

٥ مجموعة مكونة من صفيحتين متساويتين السُمك والكثافة على شكل دائرتين
متماستين من الخارج فإذا كانتا معادلتهم $d_1 : d_2 = 2 - 2 + 2 = 8$ ،
 $d_3 : d_4 = (10 - 10) + 2 = 2$ فإن مركز ثقل المجموعة

- (١) داخل d_1 (ب) داخل d_2
(ج) في نقطة التماس (د) خارج الدائرتين.

٦ في الشكل المقابل :



صفيحة منتظمة الكثافة على شكل معينين مشتركين في \overrightarrow{AB}
فإذا كان طول ضلع المعين = ل متر ، $\theta = (AB, AC)$
وكان مركز ثقل المجموعة فوق النقطة \overrightarrow{AB} بمسافة (٩ ، ل) متر
فإن : $\theta = \dots$

- (١) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{4}{5}$ (ج) $\frac{4}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

٥٨ صفيحة غير منتظمة على شكل مثلث \overrightarrow{ABC} قائمة الزاوية في \overrightarrow{B} ، $\angle C = 60^\circ$

، $\overrightarrow{AB} = 30$ سم عُلت الصفيحة تعليقاً حُرّاً من \overrightarrow{B} فوجد أن \overrightarrow{AC} يكون أفقياً في وضع
الاتزان ، ثم عُلت تعليقاً حُرّاً من \overrightarrow{C} فوجد أن \overrightarrow{AC} في وضع الاتزان يميل على الرأسى
بزاوية قياسها 30° عُن بُعدي مركز ثقل الصفيحة عن كل من \overrightarrow{AB} ، \overrightarrow{BC} ثم أوجد
ظل زاوية ميل \overrightarrow{AC} على الرأسى لو عُلت الصفيحة من الرأس \overrightarrow{A}

$50\sqrt{3}$ سم ، ١٥ سم ، $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

سلك منتظم السمك والكثافة طوله ٧٢ سم قطع إلى جزأين ، صنع من الجزء الأول دائرة نصف قطرها ٧ سم ، وثنى الجزء الثانى من منتصفه ب على شكل زاوية قائمة أ ب ح وثبتت الجزآن حيث أ ب يمس الدائرة فى ل ، ب ح يمس الدائرة فى ل فإذا كان الجزآن فى مستوى واحد. أوجد بُعد مركز ثقل المجموعة عن ب ح ، أ ب $(\frac{22}{7} = \pi)$

$$\frac{20.2}{36}, \frac{20.2}{36}$$

مثمن متساوى الأضلاع رؤوسه أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، ز ، ح ، ط مأخوذ بالترتيب على دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ن أثبت أن مركز ثقل ست كتل صغيرة متساوية موضوعة عند أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، ز ، ح يبعد عن م مسافة $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ن

أ ب ح د صفيحة رقيقة مربعة منتظمة كتلتها ل جرام وطول ضلعها ٢٠ سم مركزها م نقطة هـ منتصف أ د ، نقطة و منتصف ز ح ثنى المثلث هـ و د حتى انطبقت النقطتان د ، م ثم عُلق الجسم الناتج من نقطة أ أوجد ميل أ ب على الرأسى فى وضع التوازن وفى أى موضع من الصفيحة (البعد عن كل من أ ب ، ب ح) يمكن أن تُثبت كتلته $\frac{1}{4}$ ل جرام حتى ينطبق مركز الثقل الجديد على مركز ثقل المربع. $(\frac{75}{4}, \frac{75}{4}), (\frac{75}{4}, \frac{75}{4})$

صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها ٦٠ جم على شكل شبه منحرف أ ب ح د وفيه :
 $\angle (د ب) = \angle (د ح) = 90^\circ$ ، $أ ب = ب ح = ح د = ٢٩$ سم ، $ح د = ٢٦$ سم.
 عُن بُعد مركز ثقل الصفيحة عن ح ب ، ح د وإذا وضعت الصفيحة فى مستوى رأسى بحيث انطبق حرفها ح د على نضد أفقى. فأوجد أكبر ثقل يمكن تعليقه من الرأسى أ دون أن تتقلب الصفيحة. $(\frac{247}{10}, ٢٠.٨)$ ، ٤٤ ثجم.

صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة وزنها ٥ ث. كجم على هيئة مستطيل أ ب ح د وفيه :
 $أ ب = ٦$ سم ، $ب ح = ١٠$ سم ، $هـ أ \perp هـ د$ حيث : $أ هـ = ٦$ سم ثنى المثلث أ ب هـ حول ب بحيث يقع أ ب على ب ح ثم تُثبت الأوزان ٢ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ث. كجم عند النقط ب ، ح ، د ، هـ على الترتيب وعلقت الصفيحة من ح أثبت أن ح ب يصنع مع الرأسى فى وضع التوازن زاوية قياسها ٢١ ط أ ي = ٢٢

٦٤ صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل شبه المنحرف $ABCD$ فيه :

$$AD // BC ، \angle D = 90^\circ ، AB = 8 \text{ سم} ، BC = 12 \text{ سم}$$

، $AD = 6$ سم وكتلتها ٩٠ جرام ، انطبق قضيب رفيع منتظم كتلته ٢٥ جرام على AB

تمام الانطباق. عيّن بُعد مركز ثقل الجسم المكوّن من الصفيحة والقضيب عن A ،

BC وإذا عُلق الجسم تعليقاً خُرّاً من B برهن على أن AB يميل على الرأسى بزاوية

قياسها 45° في وضع التوازن. « $\frac{8\sqrt{3}}{11}$ ، $\frac{8\sqrt{3}}{11}$ »

٦٥ صفيحة رقيقة منتظمة كتلتها (١٢ كغ) جم على شكل مستطيل $ABCD$ مركزه M

، $AD = 2$ ، $AB = 2$ ، M منتصف AD قطع AM Δ M Δ وثُبت لينطبق تماماً على Δ M Δ وثُبت

الكتل ٢٠ ، ٦٠ ، ٣٠ جم عند الرؤوس A ، B ، C على الترتيب وعلقت المجموعة تعليقاً

خُرّاً من C فكان BC يميل على الرأسى في وضع التوازن بزاوية ظلها $\frac{11}{27}$

فأوجد قيمة : \angle

« ١٠٠ جم »

طريقة الكتلة السالبة

2



نفرض أن لدينا جسمًا كتلته k ومركز ثقله M واقتطعنا منه الجزء (١) الذي كتلته k_1 ومركز ثقله M_1 والمطلوب إيجاد مركز ثقل الجزء المتبقى (٢) والذي كتلته $(k - k_1)$ ومركز ثقله M_2

نفرض أن \vec{r}_1 ، \vec{r}_2 ، \vec{r}_M متجهات موضع M_1 ، M_2 ، M على الترتيب بالنسبة لنقطة أصل (و) فيكون :

$$\vec{r}_M (k - k_1) + \vec{r}_1 k_1 = \vec{r}_M k$$

$$\vec{r}_M (k - k_1) + \vec{r}_1 k_1 = \vec{r}_M k$$

$$\frac{\vec{r}_M k - \vec{r}_M (k - k_1)}{k - k_1} = \vec{r}_M$$

$$\vec{r}_M (k - k_1) = \vec{r}_M k - \vec{r}_1 k_1$$

ويمكن أن تكتب هذه العلاقة بدلالة المركبات في اتجاه محوري الإحداثيات المتعامدين x و y ، وص كما يلي :

$$\frac{k x_M - (k - k_1) x_M}{k - k_1} = x_M, \quad \frac{k y_M - (k - k_1) y_M}{k - k_1} = y_M$$

حيث (س، ص) مركز ثقل الجسم الأصلي وكتلته k ، (س_١، ص_١) مركز ثقل الجسم المقتطع وكتلته k_1 ، وهذه القاعدة تحدد لنا موضع M_2 وهو مركز ثقل الجزء المتبقى كما لو كان هذا الجزء مكونًا من جسمين :

* الجسم الأصلي وكتلته (k)

* الجزء المقتطع وتعتبر كتلته سالبة وتساوى $(-k_1)$

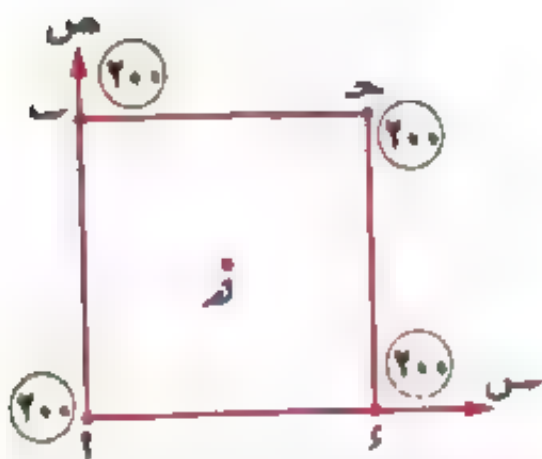
مثال ١

وضعت ٤ كتل متساوية مقدار كل منها ٢٠٠ جرام عند رؤوس المربع أ ب ح د ، عيّن مركز ثقل المجموعة وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند الرأس ح فعيّن مركز ثقل المجموعة المتبقية باستخدام طريقة الكتلة السالبة.

الحل

نفرض أن M مركز المربع أ ب ح د وطول ضلع المربع = L وأن A هي نقطة الأصل ونرسم الاتجاهين المتعامدين x و y ، A هي نكُون الجدول الآتي :

عند A	عند B	عند C	عند D	
٢٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٢٠٠	M
٠	L	L	L	x
٠	L	٠	٠	y



لاحظ أن

∴ الكتلة الموضوعة في رؤوس المربع متساوية
∴ مركز الثقل هو نقطة تلاقي القطرين مباشرة.

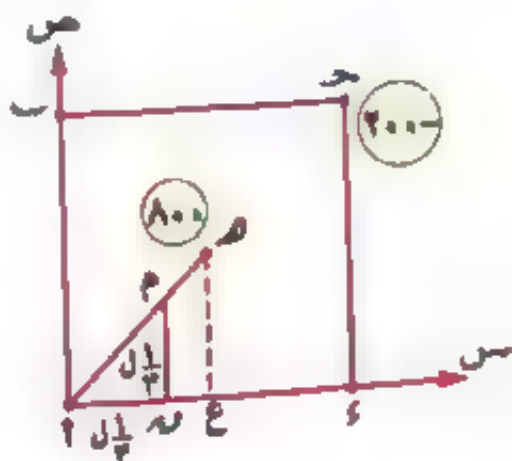
$$\therefore x_M = \frac{L \cdot 200 + L \cdot 200}{800} = \frac{L}{4}$$

$$y_M = \frac{L \cdot 200 + L \cdot 200}{800} = \frac{L}{4}$$

∴ مركز الثقل M للمجموعة = $(\frac{L}{4}, \frac{L}{4})$ أي عند M

وبعد رفع الكتلة ٢٠٠ جرام عند ح :

نختار الاتجاهين المتعامدين x و y ، A هي نكُون هناك كتلة عند M = ٨٠٠
حيث : $M = (\frac{L}{4}, \frac{L}{4})$ ، كتلة عند ح = ٢٠٠ - حيث : ح = (L, L)



عند M	عند ح	
٨٠٠	٢٠٠ -	M
$\frac{L}{4}$	L	x
$\frac{L}{4}$	L	y

$$\therefore x_M = \frac{L \times 200 - \frac{L}{4} \times 800}{200 - 800} = \frac{L}{4}$$

$$\therefore y_M = \frac{L \times 200 - \frac{L}{4} \times 800}{200 - 800} = \frac{L}{4}$$

∴ $M = (\frac{L}{4}, \frac{L}{4})$ بالنسبة للنقطة A

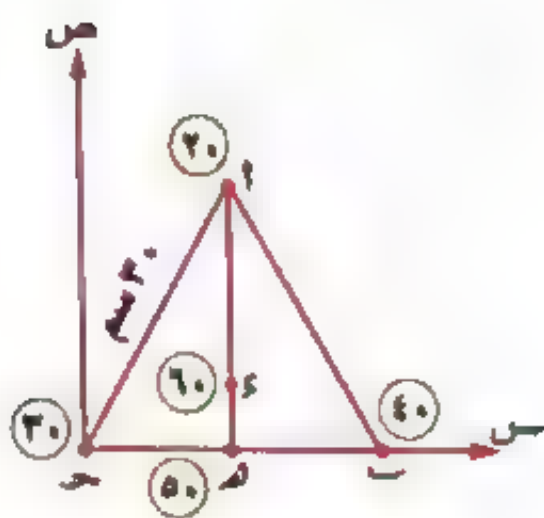
أب ح مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم ، و نقطة تقاطع متوسطاته ، ه نقطة منتصف ب ح ، ثبتت كتل مقاديرها ٢٠ ، ٤٠ ، ٢٠ ، ٦٠ ، ٥٠ جرام عند النقاط أ ، ب ، ح ، د ، ه على الترتيب. عيّن مركز ثقل هذه المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للرأس ح ؟

الحل

أولاً : نعين مركز ثقل المجموعة :

نختار الاتجاهين المتعامدين ح س ، ح ص وذلك باعتبار ح نقطة الأصل ومن هندسة الشكل نجد أن :

$$أ ه = ٢٠ \text{ م } ٦٠ = ٣٠ \text{ سم} ، د ه = ١٥ \times \frac{1}{3} = ٥ \text{ سم} ، \text{ ونكون الجدول الآتي :}$$



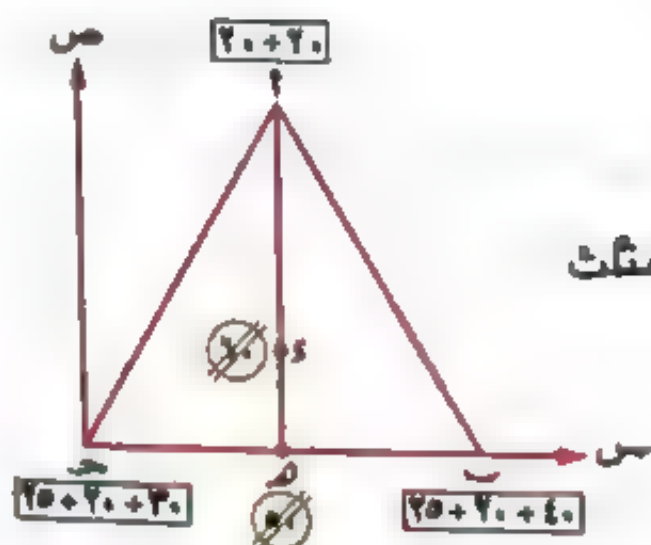
عند أ	عند ب	عند ح	عند د	عند ه
٢٠	٤٠	٢٠	٦٠	٥٠
١٥	٣٠	٠	١٥	١٥
٣٠	١٥	٠	٣٠	٠

$$\therefore \text{س م} = \frac{١٥ \times ٥٠ + ١٥ \times ٦٠ + ٣٠ \times ٤٠ + ١٥ \times ٢٠}{٥٠ + ٦٠ + ٢٠ + ٤٠ + ٢٠} = ١٥ \frac{٢}{٤}$$

$$\text{ص م} = \frac{٣٠ \times ٥ + ٣٠ \times ١٥ + ٠ + ٠ + ٠}{٥٠ + ٦٠ + ٢٠ + ٤٠ + ٢٠} = ٣$$

\therefore مركز ثقل المجموعة هو النقطة م $(٣ ، ١٥ \frac{٢}{٤})$

دل آخر :



\therefore ه نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب ح

\therefore يمكن أن نستعيز عن الكتلة عند د وهي ٦٠ جم بثلاث كتل متساوية مقدار كل منها ٢٠ جم مثبتة عند رؤوس المثلث وكذلك نستعيز عن الكتلة ٥٠ جم المثبتة عند ه بكتلتين مقدار كل منهما ٢٥ جم مثبتة عند ب ، ح وبذلك تكون القوى عند أ ، ب ، ح كما بالشكل المقابل

ح	ب	أ	
٧٥	٨٥	٤٠	ك
٠	٣٠	١٥	س
٠	٠	$3\sqrt{10}$	ص

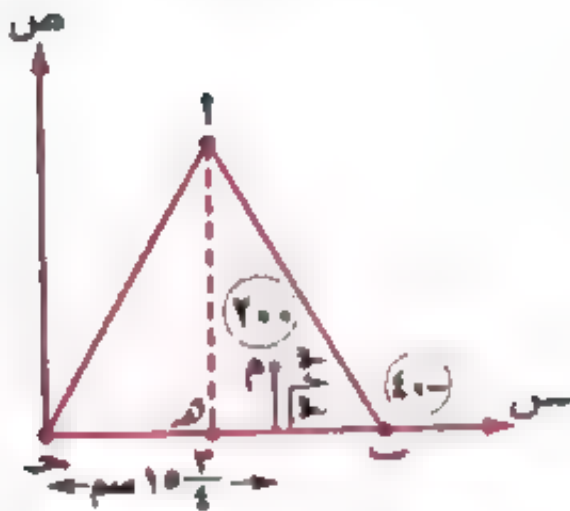
$$10\frac{3}{4} = \frac{0 \times 75 + 30 \times 85 + 10 \times 40}{75 + 85 + 40} = \text{س م}$$

$$3\sqrt{3} = \frac{0 \times 75 + 0 \times 85 + 3\sqrt{10} \times 10}{75 + 85 + 40} = \text{ص م}$$

$$\therefore \text{مركز الثقل م} = \left(3\sqrt{3}, 10\frac{3}{4} \right)$$

ثانيًا: بعد رفع الكتلة ٤٠ جرام عند ب:

عند ب	عند م	
٤٠ -	٢٠٠	ك
٣٠	$10\frac{3}{4}$	س
٠	$3\sqrt{3}$	ص



$$\frac{3\sqrt{3} \times 200}{160} = \text{ص م}, \quad 12\frac{3}{16} = \frac{20 \times 40 - 10\frac{3}{4} \times 200}{40 - 200}$$

$$\therefore \text{ص م} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$\therefore \text{مركز ثقل المجموعة بعد رفع الكتلة ٤٠ جرام عند ب هو م} = \left(\frac{3\sqrt{10}}{4}, 12\frac{3}{16} \right)$$

مثال ٣

صفحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة المستطيل أ ب ح د فيه:
 أ ب = ٨ سم ، أ د = ١٢ سم فصل منه المربع ب د ه ط ه الذي طول ضلعه ٤ سم ثم
 علق الجزء الباقي تعليقاً حرّاً من نقطة ع \exists أ د حيث: ع د = ١,٦ سم.
 أوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل د أ على الرأسى.

الحل

$$\frac{1}{6} = \frac{4 \times 4}{8 \times 12} = \frac{\text{مساحة المربع ب ر ط هـ}}{\text{مساحة المستطيل ا ب ح د}}$$

∴ المساحات تتناسب مع الكتل

$$\therefore \text{كتلة المستطيل} = 6 \text{ ك عند م} = (4, 6)$$

$$\text{كتلة المربع المقطوع} = - \text{ك عند م} = (2, 10)$$

وباختيار ح نقطة أصل ، ح س ، ح ص

$$\text{محورين متعامدين : } \therefore \text{ح م} = \frac{10 \times \text{ك} - 6 \times \text{ك}}{\text{ك} - 6} = 0.2$$

$$\text{ح م} = \frac{2 \times \text{ك} - 4 \times \text{ك}}{\text{ك} - 6} = 4.4$$

$$\therefore \text{مركز ثقل المجموعة هو م} = (4.4, 0.2)$$

ثم نرسم ع م فيكون هو الخط الرأسى ونرسم م ق \perp ع

$$\text{في } \Delta \text{ ع م ق يكون ط ل} = \frac{\text{م ق}}{\text{ع ق}}$$

$$\text{ولكن م ق} = 8 - 4.4 = 3.6 \text{ سم}$$

$$\text{ع ق} = 1.6 - 0.2 = 1.4 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ط ل} = \frac{3.6}{1.4} = 2.57$$

$$\therefore \text{ل} = 4.5$$

حل آخر :

$$\therefore \text{كتلة المربع المقطوع} = \text{ك}$$

∴ نستبدل بالمربع المتقطع أربع كتل مقدار كل منها

$$\frac{\text{ك}}{4} \text{ موضوعة عند الرؤوس ب ، ر ، ط ، هـ}$$

ونختار محوري إحداثيات ح س ، ح ص

كما بالشكل ونكوّن جدول الكتل وإحداثياتها كما يلي :

عند م	عند ب	عند هـ	عند ط	عند ر	الكتلة
$\frac{\text{ك}}{4}$	$\frac{\text{ك}}{4}$	$\frac{\text{ك}}{4}$	$\frac{\text{ك}}{4}$	$\frac{\text{ك}}{4}$	
12	12	8	8	6	س
4	0	0	4	4	ص

$$0,2 = \frac{6 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{4} - 8 \times \frac{1}{4} - 12 \times \frac{1}{4} - 12 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \text{سم}$$

$$4,4 = \frac{4 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} - 0 \times \frac{1}{4} - 0 \times \frac{1}{4} - 4 \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \text{سم}$$

∴ مركز ثقل المجموعة هو م = (4,4 ، 0,2) ثم يكمل الحل.

ملاحظة

لحساب بُعد مركز ثقل Δ أ ب ح عن المستقيم ل هـ

نحسب أولاً أبعاد الرؤوس أ ، ب ، ح عن ل هـ

فإذا كان : * بُعد الرأس أ عن ل هـ هو م_أ ، * بُعد الرأس ب عن ل هـ هو م_ب

* بُعد الرأس ح عن ل هـ هو م_ح

∴ يكون بُعد مركز ثقل Δ أ ب ح عن ل هـ هو $\frac{م_{أ} + م_{ب} + م_{ح}}{3}$

فمثلاً : في الشكل المقابل :

① حساب بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن ح د :

نحسب أبعاد الرؤوس أ ، هـ ، و عن ح د

فمن الرسم نجد أن :

أ تبعد ١٨ سم ، هـ تبعد ١٨ سم ، و تبعد ٦ سم

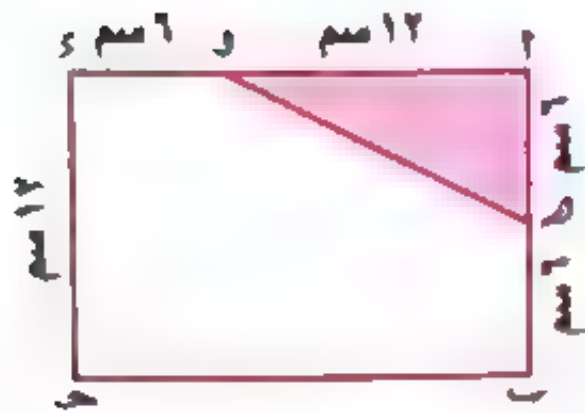
∴ بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن ح د = $\frac{6 + 18 + 18}{3} = 14$ سم.

② حساب بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن ح ب :

نحسب أبعاد الرؤوس أ ، هـ ، و عن ح ب فمن الرسم نجد أن :

أ تبعد ١٢ سم ، هـ تبعد ٦ سم ، و تبعد ١٢ سم

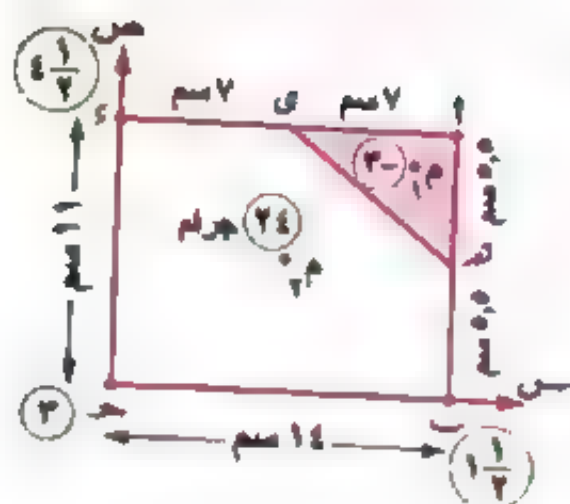
∴ بُعد مركز ثقل Δ أ هـ و عن ح ب = $\frac{12 + 6 + 12}{3} = 10$ سم.



مثال ٢

أب ح د صفيحة منتظمة على هيئة مستطيل كتلته ٢٤ جراماً فيه :
 أ ب = ١١ سم ، س ح = ١٤ سم ، د ه ، ي منتصفاً أ ب ، س على الترتيب. فإذا
 قطع المثلث أ د ي من الصفيحة وثُبَّت الكتل $١\frac{1}{4}$ ، ٣ ، $٤\frac{1}{4}$ جرام عند النقاط ب ، ح ، د
 على الترتيب. فعَيَّن مركز ثقل المجموعة. ثم إذا عُلِّقت المجموعة تعليقاً خُرّاً من ح
 فاثبت في وضع الاتزان أن الضلع ح ب يميل على الرأسى بزاوية قياسها ٤٥°

الحل



$$\therefore \frac{\text{كتلة } \triangle أ د ي}{\text{مساحة المستطيل أ ب ح د}} = \frac{\text{مساحة } \triangle أ د ي}{\text{كتلة المستطيل أ ب ح د}}$$

$$\therefore \frac{\text{كتلة } \triangle أ د ي}{24} = \frac{7 \times 0,5 \times \frac{1}{2}}{14 \times 11}$$

$$\therefore \text{كتلة } \triangle أ د ي = 24 \times \frac{7 \times 0,5 \times \frac{1}{2}}{14 \times 11} = 2 \text{ جم}$$

وتؤثر هذه الكتلة عند مركز ثقل $\triangle أ د ي$ أي عند م

فإذا اخترنا ح س ، ح ص محاورين متعامدين كان بُعد مركز ثقل

$$\triangle أ د ي \text{ عن ح د} = \frac{7 + 14 + 14}{3} = \frac{35}{3} \text{ سم}$$

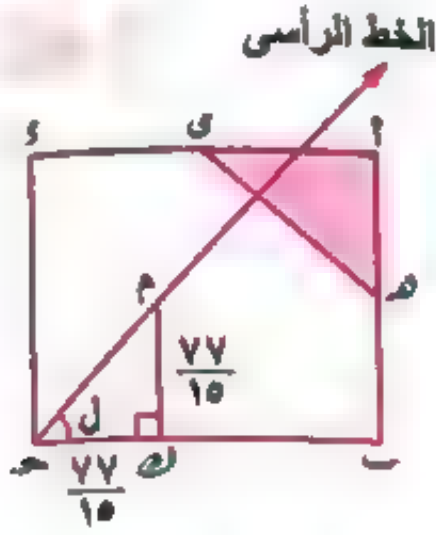
$$\text{، بُعد مركز ثقل } \triangle أ د ي \text{ عن ح ب} = \frac{11 + 11 + 0,5}{3} = \frac{22,5}{3} \text{ سم}$$

ثم نكوّن جدول الكتل وإحداثياتها الآتى :

عند م	عند ب	عند ح	عند د	عند م
٢-	$١\frac{1}{4}$	٣	$٤\frac{1}{4}$	٢٤
$\frac{35}{3}$	١٤	٠	٠	٧
$\frac{22,5}{3}$	٠	٠	١١	$٥\frac{1}{4}$

$$\therefore \text{س م} = \frac{7 \times 24 + 14 \times \frac{35}{3} + \frac{35}{3} \times 2-}{24 + ٤\frac{1}{4} + ٣ + ١\frac{1}{4} + ٢-} = \frac{77}{10}$$

$$\text{، ص م} = \frac{٥\frac{1}{4} \times 24 + ١١ \times ٤\frac{1}{4} + \frac{22,5}{3} \times ٢-}{24 + ٤\frac{1}{4} + ٣ + ١\frac{1}{4} + ٢-} = \frac{77}{10}$$



∴ مركز ثقل المجموعة م = $(\frac{77}{10}, \frac{77}{10})$

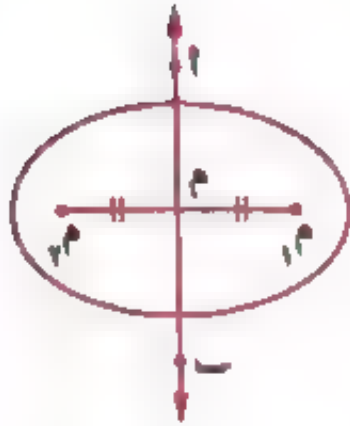
نرسم حـ م فيكون هو الخط الرأسى

∴ في $\Delta م ل ح$ يكون : $\frac{ل م}{ل ح} = \frac{ح م}{ل ح} = 1$

∴ $ل = ح$ ∴ حـ م يميل على الرأسى بزاوية قياسها 45°

حل آخر: يمكن استبدال المثلث المقطوع بثلاث كتل سالبة مقدار كل منها ١ جم موضوع عند الرؤوس ١ ، هـ ، ي ثم يكمل الحل.

مركز ثقل بعض الأجسام التي لها خصائص تماثل



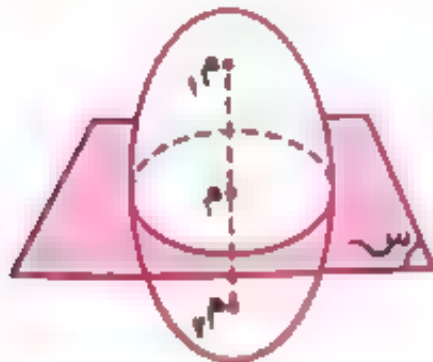
(١) في الشكل المقابل :

- نفرض أن $\overleftrightarrow{أ ب}$ محور تماثل للصفحة المنتظمة ويقسمها إلى جزأين متماثلين تمامًا من حيث الشكل وبالتالي من حيث الكتلة.
- نفرض أن $م_1$ ، $م_2$ هما مركزا ثقل الجزأين.
- من الواضح أن محور التماثل يقطع $\overline{م_1 م_2}$ على التعامد من منتصفها لأن مركز ثقل كتلتين متساويتين موضوعتين عند $م_1$ ، $م_2$ يكون عند نقطة منتصف $\overline{م_1 م_2}$.
- مركز ثقل الصفحة (م) هو نفسه مركز ثقل الكتلتين المتساويتين السابقتين ∴ م \in محور التماثل

أنت أن

إذا وجد محور تماثل هندسى لصفحة رقيقة منتظمة الكثافة وقع مركز ثقلها على خط المحور.

(٢) في الشكل المقابل :



- نفرض أن المستوى س هو مستوى تماثل للجسم المنتظم ويقسمها إلى جزأين متماثلين تمامًا.
- نفرض أن : $م_1$ ، $م_2$ هما مركزا ثقل الجزأين.
- مستوى التماثل س يقطع $\overline{م_1 م_2}$ فى نقطة م عند منتصف $\overline{م_1 م_2}$ وبالتالي م \in المستوى س

أنت أن

إذا وجد مستوى تماثل هندسى لجسم منتظم الكثافة وقع مركز ثقله فى هذا المستوى.

حالات خاصة لمركز الثقل

- ① مركز ثقل سلك منتظم الكثافة على هيئة دائرة يقع في مركز الدائرة.
- ② مركز ثقل صفيحة منتظمة الكثافة على شكل دائرة يقع في مركز الدائرة.
- ③ مركز ثقل قشرة كروية منتظمة الكثافة يقع في مركز الكرة.
- ④ مركز ثقل كرة مصمتة منتظمة الكثافة يقع في مركز الكرة.
- ⑤ مركز ثقل مجسم منتظم الكثافة على هيئة متوازي المستطيلات يقع في مركزه الهندسي.
- ⑥ مركز ثقل قشرة أسطوانية دائرية قائمة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي قاعدتيها.
- ⑦ مركز ثقل أسطوانة دائرية قائمة مصمتة منتظمة الكثافة يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزي قاعدتيها.
- ⑧ مركز ثقل منشور قائم منتظم الكثافة يقع عند نقطة منتصف القطعة المستقيمة الموازية لأحرفه الجانبية والمارة بمركزي ثقل قاعدتيه باعتبارهما صفيحتين رقيقتين منتظمتي الكثافة.

مثال ٥

صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل قرص دائري طول نصف قطره ١٠ سم اقتطع منها جزء على شكل قرص دائري يمس حافة القرص الأصلي وطول نصف قطره ٤ سم عيّن موضع مركز ثقل الجزء الباقي.

ثم إذا عُلق هذا الجزء الباقي تعليقاً خالصاً من إحدى نهايتي قطر القرص العمودي على خط المراكزين فأنوجد في وضع التوازن ظل زاوية ميل خط المراكزين على الرأسى.

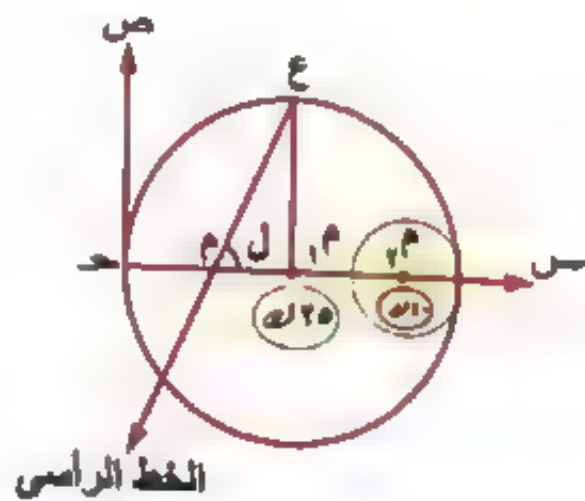
الحل

أولاً: تعيين مركز ثقل الجزء الباقي :

$$\frac{25}{4} = \frac{(10) \pi}{(4) \pi} = \frac{\text{كتلة القرص الأصلي}}{\text{كتلة القرص المقطوع}}$$

∴ كتلة القرص الأصلي = ٢٥ له ويؤثر عند ١٠

، كتلة القرص المقطوع = ٤ له ويؤثر عند ٢



• واضح أن \vec{M} هو محور تماثل للشكل
 \therefore مركز ثقل الجزء الباقي يقع على \vec{M} لذلك نختار \vec{H} ، \vec{C} ح \vec{S} محورين متعامدين
 ونكوّن الجدول الآتي :

الكتلة	٢٥ ل	٤- ل
س	١٠	١٦

$$\therefore \text{س م} = \frac{١٦ \times \text{ل ٤} - ١٠ \times \text{ل ٢٥}}{\text{ل ٤} - \text{ل ٢٥}} \quad \therefore \text{س م} = \frac{٦٤ - ٢٥٠}{٢١} = ٨ \frac{٦}{٧}$$

\therefore م مركز ثقل الجزء الباقي يقع على بُعد ١٠ - $٨ \frac{٦}{٧} = ١ \frac{١}{٧}$ سم
 من مركز ثقل القرص الأصلي (م)

ثانيًا : عند التعليق من ع :

نصل ع م فيكون هو الخط الرأسى المار بنقطة التعليق ع

\therefore في Δ ع م م يكون طال = $\frac{١٠ \text{ ع م}}{١٠ \text{ م م}}$ ولكن ع م = ١٠ سم

$$\therefore \text{طال} = \frac{٧ \times ١٠}{٨} = \frac{٢٥}{٤} \quad \text{م م} = ١ \frac{١}{٧} = \frac{٨}{٧} \text{ سم}$$

مثال ٦

صفحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة كتلتها (٤ ل) على هيئة المستطيل أ ب ح د الذى فيه :
 أ ب = ٨ سم ، ب ح = ١٢ سم ، وصل قطراه فتقاطعا فى م ثم فصل Δ أ ب م
 وثبتت الكتل ل ، ٢ ل ، ل ، ل عند الرؤوس أ ، ح ، د ، ب على الترتيب. عيّن موضع
 مركز ثقل المجموعة وإذا علقت هذه المجموعة من و تعليقاً حرّاً فاثبت فى وضع التوازن أن
 الخط الرأسى المار بنقطة التعليق ينصف د أ و ح

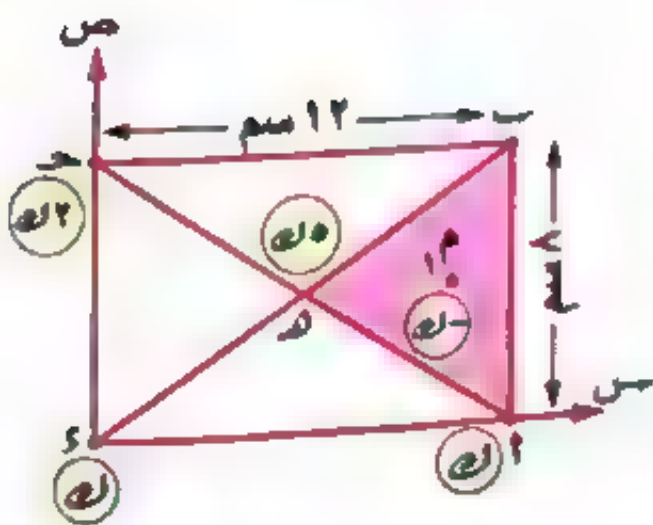
الحل

أولاً : تعيين مركز ثقل المجموعة :

كتلة Δ أ ب م = $\frac{١}{٤}$ كتلة الصفحة المستطيلة

= ل وتؤثر عند م

وهى كتلة سالبة



ثم نعلق الكتل عند الرؤوس أ، ح، د، هـ ونختار الاتجاهين المتعامدين دس، دص
 ∴ نقطة تلاقي متوسطات Δ ب هـ = $\left(\frac{0+4+8}{3}, \frac{6+12+12}{3}\right) = (4, 10)$
 وننشئ جدول إحداثيات الكتل كالآتي :

عند م	عند هـ	عند أ	عند د	عند ح
الكتلة	لـ	لـ	لـ	لـ
س	١٠	١٢	٠	٠
ص	٤	٠	٤	٨

$$\therefore \text{س م} = \frac{12 \times \text{لـ} + 6 \times \text{لـ} + 10 \times \text{لـ}}{8} = 4$$

$$\text{ص م} = \frac{8 \times \text{لـ} + 4 \times \text{لـ} + 4 \times \text{لـ}}{8} = 4$$

(المطلوب أولاً)

∴ مركز ثقل المجموعة م = (٤، ٤)

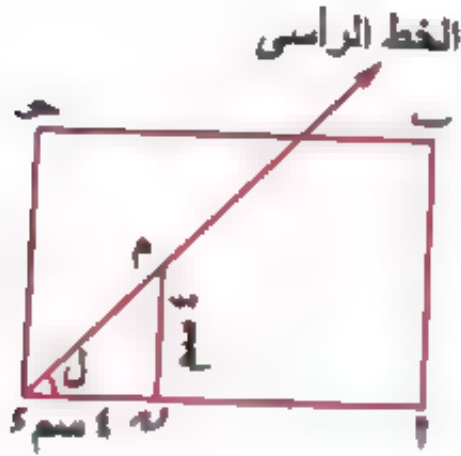
ثانياً : التعليق من د : من Δ م د :

$$\text{طال} = \frac{\text{م د}}{\text{د د}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore \text{لـ} = 40^\circ$$

∴ الخط الرأسى المار بنقطة التعليق د ينصف د هـ

(المطلوب ثانياً)



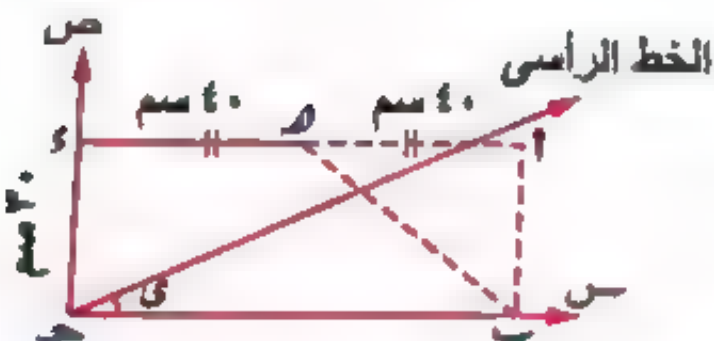
مثال ٧

صفحة رقيقة منتظمة كتلتها لـ على شكل مستطيل أ ب ح د الذى فيه :
 أ ب = ٢٠ سم ، ب ح = ٨٠ سم ، قُطع منها المثلث أ ب د حيث د منتصف أ د ، ثم
 عُلق الجزء الباقي تعليقا حراً من الرأس ح عيّن قياس زاوية ميل الضلع ح ب على الرأسى
 فى وضع الاتزان. ثم أوجد الكتلة التى يجب وضعها عند الرأس د حتى يميل ب ح بزاوية ٤٥°
 مع الرأسى فى وضع التوازن.

الحل

أولاً : إيجاد قياس زاوية ميل الضلع ح ب على الرأسى :

$$\frac{1}{4} = \frac{\text{مساحة } \Delta \text{ أ ب د}}{\text{مساحة المستطيل أ ب ح د}} = \frac{40 \times 20 \times \frac{1}{2}}{80 \times 20}$$



∴ كتلة المستطيل أ ب ح د = ك ، كتلة ∆ أ ب د = $\frac{1}{4}ك$

∴ نقطة تلاقي متوسطات ∆ أ ب د = $(\frac{30+30+0}{3}, \frac{40+80+80}{3}) = (\frac{20}{3}, \frac{200}{3})$

المثلث	المستطيل	
$\frac{1}{4}ك$	ك	الكتلة
$\frac{200}{3}$	40	س
20	10	ص

نكوّن جدول إحداثيات الكتل :

$$\frac{280}{9} = \frac{\frac{200}{3} \times \frac{1}{4}ك - 40 \times ك}{\frac{1}{4}ك - ك} \quad \therefore س = \frac{280}{9}$$

$$\frac{40}{3} = \frac{20 \times \frac{ك}{4} - 10 \times ك}{\frac{1}{4}ك - ك} \quad \therefore ص = \frac{40}{3}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{280}{9} \div \frac{40}{3} = \frac{ص}{س} \quad \therefore ط = 22 \text{ } ^\circ 12' = (د ي) \quad \therefore ط = 22 \text{ } ^\circ 12'$$

ثانيًا : عند وضع كتلة ك عند ح حتى يصبح ميل ب ح على الرأسى بزاوية 45° فى وضع التوازن :

$$\frac{ص}{س} = ط = 45^\circ \quad \therefore \frac{ص}{س} = 1$$

$$\therefore ص = س$$

عند د	الجزء المتبقى	
ك	$\frac{2}{4}ك$	الكتلة
0	$\frac{280}{9}$	س
20	$\frac{40}{3}$	ص

$$\frac{20 \times ك + \frac{40}{3} \times \frac{2}{4}ك}{ك + \frac{2}{4}ك} = \frac{0 \times ك + \frac{280}{9} \times \frac{2}{4}ك}{ك + \frac{2}{4}ك} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{20}{9}ك = ك \quad \therefore 20 = \frac{40}{3} \quad \therefore 20 + 10 = 30 \quad \therefore \frac{20}{9}ك = ك$$

مثال ٨

صفحة رقيقة منتظمة على شكل المثلث أ ب ح الذى مركزه الهندسى (ن) وقائم الزاوية فى ب وفيه : أ ب = 18 سم ، ب ح = 12 سم ، د نقطة على الحرف أ ب بحيث : د ب = 6 سم ثم رسم د ه // ب ح ويلقى أ ح فى ه . فإذا فصل ∆ أ د ه كما فصل قرص دائرى مركزه (ن) وطول نصف قطره 2 سم فعين مركز ثقل الجزء الباقى ، ثم إذا عُلق الجزء الباقى تعليقاً حراً من (ب) فأتزن بحيث يصنع أ ب مع الرأسى زاوية (ل) فاثبت أن : $2(\pi - 20^\circ) ط = 2(\pi - 26^\circ)$

11/12

$$\frac{25}{26} = \frac{51}{52} \therefore$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{0.5}{12} = \frac{1}{W} \therefore$$

∆ أ-ح : كتلة ∆ أ-د : كتلة القرص م

$${}^V(\tau) \pi : 7 \times 2 \times \frac{1}{\tau} : 18 \times 12 \times \frac{1}{\tau} =$$

$$\pi : \gamma : \gamma \gamma =$$

∴ نقطة تلاقي متوسطات Δ أب ح هي $ن = \left(\frac{0+0+18}{3}, \frac{0+0+12}{3} \right) = (6, 4)$

∴ نقطة تلاقي متوسطات Δ هي $v = \left(\frac{12+12+18}{3}, \frac{0+0+4}{3} \right) = (14, 1\frac{1}{3})$

عند ٢٧	عند ٢٠	عند ١٤	
٢٧	$20 - \pi$	$20 - 2$	الكتلة
٤	٤	$1\frac{1}{4}$	س
٦	٦	١٤	ص

$$\frac{\pi \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon}{\pi - 2\varepsilon} = \frac{\varepsilon \times \odot 27 + \varepsilon \times \odot \pi - 1 \frac{1}{2} \times \odot 2-}{\odot 27 + \odot \pi - \odot 2-} = \therefore \text{مس}$$

$$\frac{\pi 7 - 12.}{\pi - 24} = \frac{7 \times \textcircled{27} + 7 \times \textcircled{\pi} - 12 \times \textcircled{2-}}{\textcircled{27} + \textcircled{\pi} - \textcircled{2-}} = \text{ص،}$$

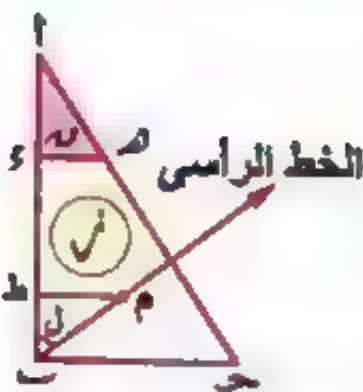
∴ مركز الثقل هو النقطة م $\left(\frac{\pi 7 - 12.}{\pi - 24}, \frac{\pi 4 - 1.4}{\pi - 24} \right)$

فی Δ م ط ب : ط ا ل = $\frac{م ط}{ط ب}$

$$\frac{(\pi - 26) \varepsilon}{\pi - 2\varepsilon} = \frac{\pi \varepsilon - 1 \cdot \varepsilon}{\pi - 2\varepsilon} = \text{ولكن م ط}$$

$$\frac{(\pi - 26) \cdot 2}{(\pi - 20) \cdot 2} = 1 \text{ ط} \therefore \frac{(\pi - 20) \cdot 7}{\pi - 24} = \frac{\pi \cdot 7 - 140}{\pi - 24} = 1 \text{ ط}$$

$$(\pi - \gamma) \gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (\pi - \gamma) \gamma \therefore$$





١ وضعت ٤ كتل متساوية عند الرؤوس أ، ب، ج، د، لمربع طول ضلعه ١٠ سم عُنَّ مركز ثقل هذه المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند أ فعُنَّ مركز ثقل المجموعة المتبقية. $(0, 0)$ ، $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ باعتبار \vec{AB} ، \vec{AD} محوري إحداثيات موجبين.

٢ وضعت ٥ كتل متساوية عند الرؤوس أ، ب، ج، د، لمربع أ ب ح د، النقطة هـ حيث هـ ملتقى قطريه وطول ضلع المربع ١٢ سم. عُنَّ مركز ثقل المجموعة وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فعُنَّ مركز ثقل المجموعة المتبقية بالنسبة للمحورين أ ب، أ د $(6, 6)$ ، $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

٣ وضعت ٢ كتل متساوية عند الرؤوس أ، ب، ج، للمثلث أ ب ج المتساوي الأضلاع والذي طول ضلعه ١٨ سم عُنَّ مركز ثقل المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فعُنَّ مركز ثقل المجموعة المتبقية.

$(9, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ ، $(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ باعتبار \vec{AB} والعمودي عليه من ج محوري إحداثيات موجبين.

٤ أ ب ج مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٢٠ سم، م نقطة تقاطع متوسطاته، د نقطة منتصف ب ج، ثبت كتل مقاديرها ١٥، ٣٠، ٧٥، ٤٥، ٤٥ في النقطة أ، ب، ج، د، ح، م على الترتيب. عُنَّ مركز ثقل هذه المجموعة. وإذا رفعت الكتلة الموجودة عند ب فأين يقع مركز ثقل المجموعة المتبقية؟

$(\frac{10}{7}, \frac{3\sqrt{3}}{7})$ ، $(\frac{15}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ باعتبار \vec{AB} والعمودي عليه من ج محوري إحداثيات موجبين.

٥ أ ب ج صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٨ سم، م مركز ثقله أقتطع منه المثلث م ب ج عُنَّ مركز ثقل الجزء المتبقى وإذا عُلق الجزء الباقي من ج تعليقاً حُرّاً. فأوجد ظل زاوية ميل ج ب على الرأسى.

$(9, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ باعتبار \vec{AB} والعمودي عليه من ج محوري إحداثيات موجبين، $\frac{3\sqrt{3}}{9} = \frac{1}{3}$.

٦ صفيحة رقيقة منتظمة محدودة بالمستطيل $ABCD$ حيث :
 $AB = 20$ سم ، $BC = 60$ سم ، M منتصف AD ، N منتصف BC ، فإذا فصل
 المثلث DMN من الصفيحة وعلق الجزء الباقي تعليقاً حُرّاً من النقطة B فأوجد في
 وضع التوازن ظل الزاوية التي يصنعها BC مع الرأسى.

٧ $ABCD$ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه : $AB = 40$ سم
 $BC = 60$ سم ، M منتصف AD ، قطع منها المثلث ABM ثم علق الجزء الباقي
 تعليقاً حُرّاً من الرأس C عيّن ظل زاوية ميل BC على الرأسى في وضع الاتزان.

٨ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة المستطيل $ABCD$ فيه : $AB = 12$ سم
 $BC = 18$ سم. نصف AB في M ، فرضت نقطة $(O) \in AD$ بحيث : $AO = 12$ سم
 ثم فصل $\triangle AOM$ و عيّن مركز ثقل الجزء الباقي بالنسبة للمحورين BC ، AD ثم إذا
 علق الجزء الباقي تعليقاً حُرّاً من C فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل BC
 على الرأسى.

٩ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة المستطيل $ABCD$ فيه : $AB = 16$ سم
 $BC = 24$ سم ، $M \in AD$ بحيث $AM = 18$ سم ، فصل $\triangle ABM$ أوجد بُعد مركز
 ثقل الجزء الباقي من الصفيحة عن كل من BC ، AD وإذا علق هذا الجزء الباقي
 تعليقاً حُرّاً من (D) فأوجد في وضع التوازن قياس زاوية ميل AD على الرأسى.

١٠ لوح رقيق دائري منتظم الكثافة مساحته 500 سم^٢. ثقب ثقباً دائرياً مساحته 100 سم^٢
 فإذا كان بُعد مركز الثقب عن مركز اللوح 4 سم فعين أين يقع مركز ثقل الجزء المتبقى
 من اللوح. «على خط المركزين وعلى بُعد 1 سم من مركز اللوح»

١١ صفيحة رقيقة منتظمة على شكل قرص دائري طول نصف قطره 20 سم. اقتطع منها جزء
 على شكل قرص دائري طول نصف قطره 10 سم ويبعد مركزه عن مركز الصفيحة 20 سم.
 أوجد مركز ثقل الجزء المتبقى. «على خط المركزين ويبعد $2,5$ سم من مركز القرص الأصلي»

١٢ قرص مصمت طول نصف قطره ٣ سم عملت به فجوة على شكل دائرة طول نصف قطرها ١ سم وتمس سطح القرص في نقطة (د) أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي من القرص عن نقطة د ثم إذا عُلق الجزء الباقي تعليقاً حرّاً من نهاية قطر القرص العمودي على خط المركزين. فأوجد في وضع التوازن ظل زاوية ميل المستقيم الواصل بين نقطة التعليق ومركز القرص على الرأسى.

« $\frac{1}{4}$ سم عن د ، طال = $\frac{1}{4}$ »

١٣ قطعة من الورق المقوى رقيقة ومنتظمة الكثافة على شكل المربع أ ب ح د تقاطع قطراه في (هـ) وفصل د هـ و ثبت فوق د هـ و ثبت فوق د هـ ثم عُلق الشكل الناتج من (حـ) تعليقاً حرّاً أثبت في وضع التوازن أن ح د يميل على الرأسى بزاوية قياسها $54^\circ 28'$

١٤ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل المربع أ ب ح د تقاطع قطراه في هـ ثم فصل المثلث هـ ح د و ثبت فوق المثلث هـ أ ب و عُلق الشكل الناتج تعليقاً حرّاً من نقطة أ ، أوجد في وضع الاتزان قياس زاوية ميل أ ب على الرأسى.

« $23^\circ 41'$ »

١٥ أ ب ح صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على هيئة مثلث قائم الزاوية في ب حيث : أ ب = ١٢ سم ، ب ح = ٢٠ سم وكانت ح ص ، ص ع ، ع منتصفات أ ب ، ب ح ، ح د على الترتيب. قطع المثلث ح ص ع وطبق على المثلث ص ب ح فاذا عُلق المجموعة تعليقاً حرّاً من النقطة ب أوجد ظل زاوية ميل ب ح على الرأسى في وضع الاتزان.

« $\frac{24}{35}$ »

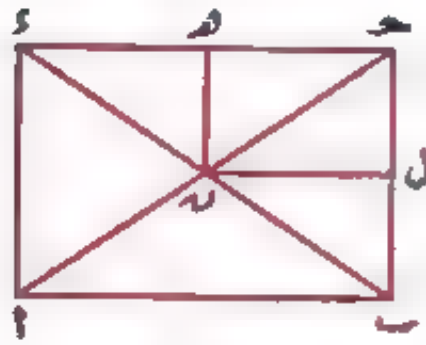
١٦ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل مربع أ ب ح د طول ضلعه ٣٦ سم ، تقاطع قطراه في م ونصف د هـ في نقطة هـ وفصل منها المثلث هـ د هـ عَين مركز ثقل الجزء الباقي من الصفيحة. وإذا عُلق الصفيحة تعليقاً خالصاً من نقطة أ حتى اتزنت في مستوى رأسى. فأوجد ميل أ ب على الرأسى.

« $\frac{41}{47}$ »

١٧ أ ب ح د صفيحة على هيئة مربع طول ضلعه ٧٨ سم ، هـ نقطة على ح د بحيث : د هـ = ٢٦ سم. إذا قطع المثلث د هـ هـ ثم عُلق الجزء الباقي تعليقاً حرّاً من أ ، فبرهن على أن الرأس المار بنقطة أ يقطع ب ح في نقطة و حيث : ح و = ١٥ سم.

١٨ صفيحة رقيقة مستوية منتظمة الكثافة على شكل المعين أ ب ح د الذى طول ضلعه ١٨ سم وفيه : و (د ب هـ) = 120° فصل منها د ب هـ حيث هـ نقطة تلاقى قطريه برهن أن مركز ثقل الجزء الباقي يبعد عن هـ بمقدار ٢ سم. وإذا عُلق الجزء الباقي من (د) تعليقاً حرّاً فبرهن في وضع التوازن أن أ هـ يميل على الرأسى بزاوية قياسها (ل) حيث ١٠ طال = $3\sqrt{2}$

١٩ **صفحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل** $أ ب ح د$ فيه : $أ ب = ٦$ سم ، $ب ح = ٨$ سم ، قُطعت منها قطعة مربعة الشكل من الرأس $ب$ طول ضلعها ٤ سم ، أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من $ح د$ ، $ح ب$ ثم إذا عُلق الجزء الباقي تعليقاً حرّاً من الرأسى $ح$ فأوجد فى وضع التوازن ظل زاوية ميل $ح ب$ على الرأسى .
« ٢ سم ، $٢ \frac{١}{٢}$ سم ، $\frac{٧}{٢}$ »



(دور أول ٢٠١٨) في الشكل المقابل :

١ $أ ب ح د$ صفحة رقيقة منتظمة على شكل مستطيل فيه :
٢ $أ ب = ١٢$ سم ، $ب ح = ٨$ سم فإذا كان $ل$ ، $هـ$ منتصفى $ب ح$ ، $ح د$ على الترتيب ، $أ ح \cap ب د = \{ن\}$
وفصل المستطيل $ن ل$ $ح د$ من الصفحة.

فعين بُعد مركز ثقل الجزء المتبقى عن $أ ب$ ، $ح د$ ،
وإذا علقت الصفحة تعليقاً حرّاً من $أ$

فأوجد ظل زاوية ميل $أ ب$ على الرأسى فى وضع الاتزان.
« $\frac{٢}{٣}$ »

٢١ **صفحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة على شكل مستطيل** $أ ب ح د$ مركزه $م$
حيث : $أ ب = ١٦$ سم ، $ب ح = ٢٠$ سم. أخذت النقطتان $هـ$ ، $و$ على $أ ب$
حيث : $أ هـ = ب و = ٣$ سم ، إذا قُطع المثلث $م هـ و$ فأوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من $ح د$ ، $ح ب$ وإذا عُلق هذا الجزء تعليقاً حرّاً من $د$ فأوجد فى وضع التوازن ظل الزاوية التى يصنعها $د ح$ مع الرأسى .
« $\frac{٣٥٥}{٣٢٤}$ ، $(٨ ، \frac{٧١٠}{٨١})$ »

٢٢ قطعة رقيقة منتظمة الكثافة من الورق المقوى على شكل المربع $أ ب ح د$ الذى طول ضلعه ١٨ سم تقاطع قطراه فى $(ن)$ ثم فصل $ن ب$ $ح د$ وعُلق الجزء الباقي من نقطة $(هـ)$ حيث $هـ \in أ ب$ فاتزن بحيث كان $أ ب$ أفقياً. أوجد طول : $أ هـ$
« ٧ سم »

٢٣ **صفحة منتظمة على شكل مربع** $أ ب ح د$ طول ضلعه ٨ سم ، فصل منها قرص دائرى طول نصف قطره ٢ سم ويبعد مركزه ٢ سم عن كل من $أ ب$ ، $ب ح$ عُن بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن كل من $ح د$ ، $ح ب$.
« ٣,٧٦ سم ، ٣,٧٦ سم »

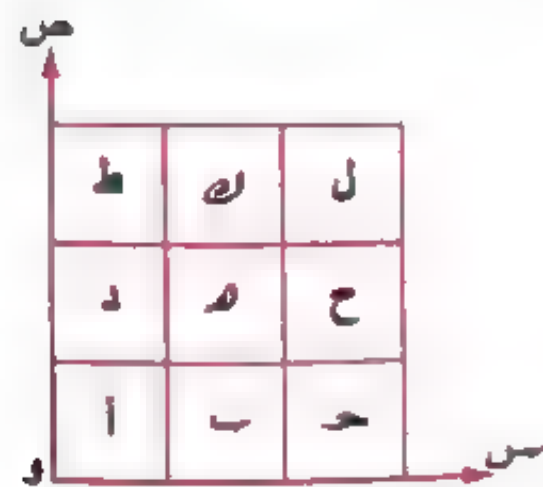
٢٤ **صفحة رقيقة منتظمة محدودة بالمربع AB الذي طول ضلعه 40 سم ، نُقِبَت نُقْبًا دائريًا مساحته 100 سم² ومركزه عند نقطة على القطر BD ونقسمه بنسبة $1 : 4$ من ناحية B ، ثم عُطِقَت تعليقًا حُرًّا من الرأس A عَيْنُ قياس زاوية ميل الضلع AB على الرأسى فى وضع الاتزان.**

٢٥ **صفحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل المثلث ABC المتساوى الساقين حيث : $AB = AC = 26$ سم ، $BC = 20$ سم. رسم $A'D$ $\perp BC$ ويقطع BC فى D ، فإذا كانت M منتصف AD وفصل المثلث MBD أوجد بُعد مركز ثقل الجزء الباقي عن النقطة M**

٢٦ **صفحة رقيقة منتظمة على شكل مثلث متساوى الساقين ABC فيه : $AB = AC = 4$ ، AD هو ارتفاع المثلث وطوله 45 سم رُسم مستقيم مواز للقاعدة BC ويمر بمركز ثقل الصفحة فقطع AB ، AC فى النقطتين M ، N على الترتيب. أثبت أن مركز ثقل الشكل الرباعى $MBND$ يقع على AD ويبعد 7 سم عن نقطة D**

٢٧ **صفحة رقيقة منتظمة الكثافة محدودة بالمثلث ABC القائم الزاوية فى B فيه : $AB = BC = 9$ سم. إذا فصل المثلث ABM ، حيث M مركز ثقل الصفحة ، عُلق الجزء الباقي تعليقًا حُرًّا من النقطة B فأوجد ظل زاوية ميل BC على الرأسى فى وضع التوازن.**

٢٨ **فى الشكل المقابل :**



صفحة منتظمة محدودة بمربع طول ضلعه 6 سم قُسمت إلى تسعة مربعات متطابقة فاختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

أولاً : بعد قطع المربع (هـ) يكون مركز الثقل هو
 (١) (٢ ، ٢) (ب) (١ ، ١) (ج) (٦ ، ٦) (د) (٣ ، ٣)

ثانياً : بعد قطع المربعين (ح ، ل) يكون مركز الثقل هو
 (١) (١ ، ١) (ب) (٢ ، ١) (ج) (٣ ، $\frac{17}{3}$) (د) (١ ، ٢)

ثالثاً : بعد قطع المربع (هـ) ولصقه على المربع (ب) يكون مركز الثقل هو
 (١) ($\frac{25}{9}$ ، ٢) (ب) ($\frac{29}{9}$ ، ٢) (ج) (٢ ، ٢) (د) ($\frac{25}{9}$ ، ٢)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① جسم مكوّن من أسطوانة مصمتة نصف قطرها نق وارتفاعها نق ويعلوها نصف كرة نصف قطرها نق فإن مركز ثقل الجسم يكون
(أ) داخل الأسطوانة.

(ب) داخل نصف الكرة.

(ج) على السطح بين الأسطوانة ونصف الكرة.

(د) خارج كليهما.

② كرتان مصمتتان متماستان من الخارج وطولا نصفى قطريهما ٦ سم ، ٣ سم مركز ثقل الجسم الناشئ عند تماسهما يبعد عن مركز الكرة الكبرى مسافة

(أ) ١ سم. (ب) ٢ سم. (ج) ٣ سم. (د) ٤ سم.

③ سلك منتظم الكثافة على شكل دائرة معادلتها : $س^2 + ص^2 = ٣٦$ مثبت فيه ثقلين كلاً منهما يساوي وزن السلك عند النقطتين (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) فإن مركز ثقل المجموعة هو

(أ) (٣ ، ٣) (ب) (٢ ، ٢) (ج) (٠ ، ٠) (د) (٦ ، ٦)

④ صفيحة معدنية منتظمة على شكل مثلث متساوي الأضلاع $أ ب ح$ طول ضلعه $٨\sqrt{٣}$ سم قطع منها قرص دائري طول نصف قطره يساوي ٤ سم فإن بعد مركز ثقل الجزء الباقي عن الرأس $أ$ يساوي سم

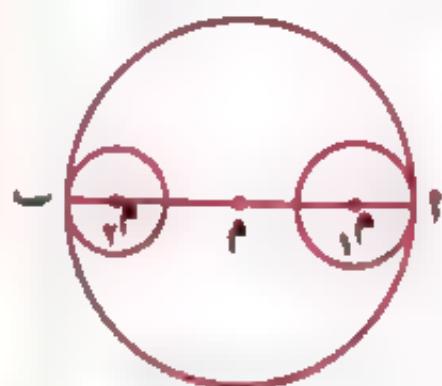
(أ) ٤ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (ج) ٨ (د) ٦

⑤ الشكل المقابل يبين قرص دائري مركزه م ، ثقب ثقبان دائريان

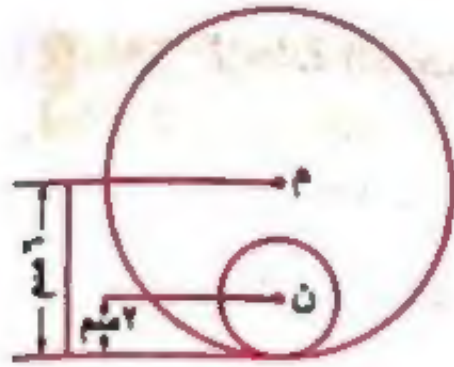
مركزاهما $١ م$ ، $٢ م$ وطولا نصفى قطريهما ٢ سم ، ٢ سم

على الترتيب ، فإن مركز ثقل الجزء المتبقى من الشكل

يقع على



(أ) $\overline{١ م ٢ م}$ (ب) $\overline{٢ م ١ م}$ (ج) $\overline{١ م ٢ م}$ (د) $\overline{٢ م ١ م}$



(د) ٢

٦ الشكل المقابل يمثل قرص دائري منتظم من الصاج الرقيق

، طول نصف قطره ٦ سم ومركزه م ، فصل منه قرص دائري مركزه ن ، طول نصف قطره ٢ سم ، فإن مركز ثقل الجزء الباقي يبعد عن م مسافة = سم.

(ج) ١

(ب) ٠,٥

(١) ٠,٤

٧ الشكل المقابل يمثل صفيحة رقيقة منتظمة السُمك

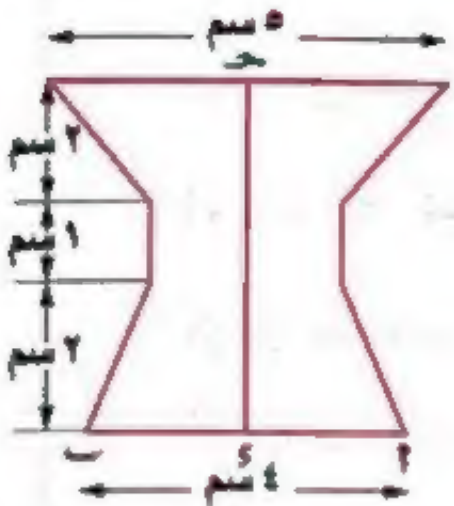
والكثافة و متماثلة حول المحور حـ د ، فإذا كانت الأبعاد كما بالرسم ، ورمز لبُعد مركز ثقل الصفيحة عن أـ ب بالرمز ل سم فإن أى مما يأتى صحيحاً ؟

(ب) $2 < L < 2\frac{1}{4}$

(١) $L = 2$

(د) $2\frac{1}{4} < L < 4$

(ج) $L = 2\frac{1}{4}$



٣٠ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل قرص دائري مركزه نقطة الأصل

وطول نصف قطره ٢٤ سم ، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (٢- ، ١٢-)

وطول نصف قطره ٤ سم ومركز الآخر (٦ ، ١٠) وطول نصف قطره ١٢ سم.

عُيِّن مركز ثقل الجزء الباقي من القرص. «(٢- ، ٣-)»

٣١ صفيحة رقيقة منتظمة السُمك والكثافة على شكل قرص دائري مركزه نقطة الأصل

وطول نصف قطره ٦ وحدات طول ، قُطع منه قرصان دائريان مركز أحدهما (١- ، ٣-)

وطول نصف قطره وحدة طول ومركز الآخر (١ ، ٢) وطول نصف قطره ٣ وحدات

طول. أوجد مركز ثقل الجزء الباقي من القرص الأصلي. «(١٥- ، ٤- / ٢٦ ، ١٣)»

٣٢ سلك منتظم طوله ١٠٠ سم ثنى على هيئة خمسة أضلاع من مسدس منتظم

أـ ب حـ د هـ و بدأ من نقطة أ عيّن بُعد مركز ثقله عن مركز المسدس. وإذا عُلق السلك

تعليقاً حُرّاً من طرفه أ فعين قياس زاوية ميل أـ ب على الرأسى فى وضع الاتزان.

«٢٥ ٣٧ سم ، ٤٢ ٥٥»

٣٣ صفيحة رقيقة محدودة بمسدس منتظم أـ ب حـ د هـ و فصل عن الصفيحة سطح المثلث

أـ بـ هـ حيث هـ نقطة تقاطع أـ حـ مع بـ هـ ثم عُلق الجزء الباقي تعليقاً حُرّاً من نقطة (و)

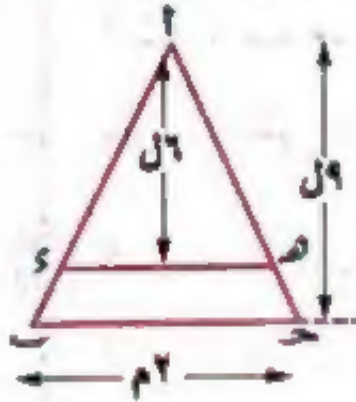
عين ظل زاوية ميل وـ أ على الرأسى فى وضع التوازن.

«٣٧ ٣٤ / ٢٩»

مسائل تقيس مستويات عليا من التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١ في الشكل المقابل :



صفحة منتظمة الكثافة على شكل مثلث 'أ ب ح' فيها

$أ ب = أ ح = ب ح = ٢$ متر ، $د هـ // ب ح$

إذا كانت 'أ' تبعد عن 'ب ح' مسافة (٩ ل) متر

وتبعد عن 'د هـ' مسافة (٦ ل) متر

أولاً : مركز ثقل شبه المنحرف 'ب ح د هـ' يبعد عن 'ب ح' مسافة تساوي متر

- (أ) ل (ب) $\frac{٢}{٣} ل$ (ج) $\frac{٥}{٣} ل$ (د) $\frac{٧}{٥} ل$



ثانياً : إذا طوى $\Delta أ د هـ$ حول 'د هـ' بحيث انطبق جزء منه

على شبه المنحرف 'ب ح د هـ' كما بالشكل المقابل

فإن مركز ثقل الشكل الناتج يبعد عن 'ب ح' مسافة

تساوي متر

- (أ) $\frac{٧}{٩} ل$ (ب) $\frac{٦}{٥} ل$ (ج) $\frac{١١}{٩} ل$ (د) $٢ ل$

٢ في الشكل المقابل :



صفحة منتظمة الكثافة على شكل مثلث متساوي الأضلاع 'أ ب ح'

طول ضلعه ٤ متر قطع منها $\Delta أ د هـ$ المتساوي الساقين

وارتفاعه (ل) متر حيث $ل > ٢\sqrt{٣}$

فإذا كان مركز ثقل الصفحة 'أ ب ح د هـ' عند النقطة 'و'

فإن : ل = متر

- (أ) $٢\sqrt{٢}$ (ب) $٢\sqrt{٣}$ (ج) ٢ (د) $٢\sqrt{٢}$

٣٥ صفحة رقيقة منتظمة محدودة بالمستطيل 'أ ب ح د' حيث : $أ ب = ٢٠$ سم ، $أ د = ٤٠$ سم

، $و \in ب د$ بحيث : $ب و = ١٥$ سم ، $د هـ = ٧,٥$ سم ، نُقبت الصفحة ثقبان

دائريان الأول مركزه 'و' ، طول نصف قطره ٧ سم ، الثاني مركزه 'هـ' وطول نصف قطره

$٢,٥$ سم. عيّن نقطة على 'أ ب' إذا عُلق منها الجزء الباقي من الصفحة يكون

'أ ب' أفقياً وعيّن نقطة أخرى على 'أ د' بحيث إذا عُلق منها الجزء الباقي من الصفحة

يكون 'أ د' أفقياً. (٤٠ ، ١٥,٥) ، (٢٠ ، ١٩,٢) باعتبار 'ح د' محوري إحداثيات موجبين.

٣٦ أ ب ح د صفيحة منتظمة السمك والكثافة على شكل مستطيل فيه : $أ = ب = ١٨$ سم ، $ب = ح = ٢٤$ سم ، $هـ$ نقطة تقاطع قطرية $أ ح$ ، $ب د$ فصل المثلث $أ هـ د$ وثبت فوق المثلث $ب د$ بحيث تنطبق $أ$ على $ب$ ، $د$ على $ح$ عين بُعدى مركز ثقل الصفيحة عن $أ ب$ ، $ب ح$ وإذا علقت الصفيحة تعليقاً حُرّاً من الرأس $ح$ فأحسب ظل زاوية ميل $ح ب$ على الرأسى .
« ١٢ سم ، ٦ سم ، $\frac{١}{٢}$ »

٣٧ أ ب ح د صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على هيئة مستطيل مركزه (ن) وكتلته (ل) فيه : $أ ب = ١٢$ سم ، $ب ح = ١٨$ سم . قطع $Δ ن ب$ ثم ثبتت فى الجزء الباقي الكتل (ل) ، $٢ ل$ ، $٣ ل$ ، $٤ ل$ ، $\frac{٧}{٤} ل$ عند النقط $أ$ ، $ب$ ، $ح$ ، $د$ ، $ن$ على الترتيب عين مركز ثقل المجموعة . ثم أثبت أنه إذا علقت المجموعة تعليقاً حُرّاً من (د) فإن $ح د$ يميل على الرأسى فى وضع الاتزان بزاوية قياسها ٤٥°

« (٦ ، ٦) باعتبار $ح ب$ ، $ح د$ محورى إحداثيات موجبين »

٣٨ أ ب ح د صفيحة رقيقة منتظمة على شكل مربع طول ضلعه ٤٨ سم وكتلتها ٤٠ جم . النقطتان ل ، م منتصفا $أ ب$ ، $د هـ$ على الترتيب . قطع المثلث $أ ل م$ ثم ثبتت عند كل من $ح$ ، $د$ كتلة تساوى كتلة المثلث المقطوع وثبت عند $ب$ كتلة تساوى ضعف كتلة المثلث المقطوع ، فإذا علقت المجموعة تعليقاً حُرّاً من النقطة $ح$ أوجد ظل زاوية ميل $ب ح$ على الرأسى فى وضع الاتزان .
« $\frac{٢٥}{٣١}$ »

٣٩ صفيحة رقيقة منتظمة الكثافة على شكل المستطيل $أ ب ح د$ الذى فيه : $أ ب = ٢٥$ سم ، $ب ح = ١٦$ سم . فرضت نقطة $هـ \in ب ح$ ، $و \in ب أ$ بحيث : $ب هـ = ١٠$ سم ثم فصل $Δ ب هـ و$ ووضعت الصفيحة فى مستوٍ رأسى بحيث انطبق حرفها $ح هـ$ على نضد أفقى أملس فكانت الصفيحة على وشك الدوران حول (هـ) أوجد طول : $ب و$
« ٢٤ سم »

٤٠ أ ب ح د صفيحة رقيقة منتظمة السمك والكثافة وزنها ثقل كيلو جرام واحد على شكل مربع طول ضلعه ٦٠ سم ، ط منتصف $أ د$ ، ن منتصف $أ ب$ ، س منتصف $ب ح$ ، ثنى المثلث ط $أ ن$ حول ط $ن$ ، وثنى المثلث $ن ب س$ حول $ن س$ حتى لامس سطحاهما سطح باقى الصفيحة ، ثم ثبت جسيم وزنه ٦٠٠ ث جم فى نقطة ط ، ثبت جسيم آخر وزنه ٤٠٠ ث جم فى نقطة س ، عين مركز ثقل المجموعة فى وضعها الأخير .
« (٢٣ ، ٢٨.٧٥) باعتبار $ح ب$ ، $ح د$ محورى إحداثيات موجبين »

بالمكتبات

الآن

المعاصر

في:

- الديناميك
- الجبر والهندسة الفراغية
- التفاضل والتكامل
- اللغة الإنجليزية
- اللغة الفرنسية

الاستاتيكا الرياضيات التطبيقية

يصرف مجاناً مع هذا الكتاب

- المراجعة المسبقة
- الجزء الخاص بالإجابات

عزيز إسحق سرجيوس
حسين جاويش



معاك
Ma3ak App

- أدخل كودك الشخصي
- الموجود على ظهر الغلاف
- لمزيد من المعلومات
- انظر صفحتي ٥٠٤



6 223007 310635



/ElMoasser.eg



مكتبة الطلبة

للطباعة والنشر والتوزيع

٣ شارع كامل صدقي - الفجالة

تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢/٢٥٩٣٤٠١٢

e-mail: info@elmoasserbooks.com

www.elmoasserbooks.com

